

УДК 550.38

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОГРАММ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ИНВЕРСИИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

© 2001 г. К. Новожинский¹, П. Ю. Пушкарёв²

¹Институт геофизики Польской академии наук, г. Варшава

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 02.08.2000 г.

В статье описан алгоритм программы двумерной инверсии магнитотеллурических и магнитовариационных данных, разработанной К. Новожинским в институте геофизики Польской академии наук. Предложен графический интерфейс и рассмотрены выполненные по этой программе тестовые расчеты. Проведен анализ программы в сопоставлении с другими программами, широко применяемыми в современной магнитотеллурике, и исследована эффективность двумерной магнитотеллурической интерпретации.

ВВЕДЕНИЕ

В 90-х годах в институте геофизики Польской академии наук была создана компьютерная программа, позволяющая восстанавливать удельные электрические сопротивления двумерной среды по амплитудам и фазам кажущихся сопротивлений ρ_{xy} , ρ_{yx} и Φ_{xy} , Φ_{yx} , а также по вещественным и мнимым частям типпера $C_u = \text{Re}(H_z/H_x)$ и $C_v = \text{Im}(H_z/H_x)$, заданным в разных точках профиля в широком интервале частот.

Важной особенностью программы является ее удобный графический интерфейс, позволяющий проводить интерпретацию в интерактивном режиме.

Новую программу было интересно сопоставить с другими широко применяемыми в магнитотеллурике программами двумерной инверсии. С этой целью был выполнен ряд простых модельных экспериментов.

АЛГОРИТМ ПРОГРАММЫ

Математические основы двумерной магнитотеллурической инверсии известны уже на протяжении более чем 20 лет; они впервые предложены в работе [Jupp and Vozoff, 1977]. Основные этапы инверсии сводятся к следующему. Вначале выбирается некоторая исходная модель с каким-либо распределением электропроводности. Далее решается двумерная прямая задача, т.е. комплексное уравнение Гельмгольца с граничными условиями Дирихле. При этом применяется конечно-разностный метод, основанный на применении теоремы Грина [Varga, 1962], что позволяет избежать вычисления вторых производных компонент поля E_y и H_y . Затем находятся производные величин ρ_{xy} , ρ_{yx} , Φ_{xy} , Φ_{yx} , C_u и C_v как функционалов электропроводности σ . Для поиска сле-

дующего приближения используется метод Марквардта [Marquardt, 1963; 1970].

Рассмотрим алгоритм программы более подробно. В двумерной модели компоненты электромагнитного поля E_y и H_y удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям Гельмгольца (зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$, ось z направлена вниз, свойства среды не меняются вдоль оси y , все величины измеряются в единицах СИ):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = i\omega\mu_0\sigma E_y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = i\omega\mu_0 H_y.$$

Решения этих уравнений ищутся в прямоугольной области, ограниченной координатами x_L (слева), x_R (справа), z_T (сверху) и z_B (снизу). Предполагается, что для значений $x \leq x_L$ и $x \geq x_R$ распределение электропроводности одномерно, т.е. функция $\sigma(x, z)$ зависит только от z , а поле асимптотически приближается к одномерному так, что решения одномерных задач могут быть использованы в качестве граничных условий при x , равном x_L или x_R . Граничные условия при z , равном z_T или z_B , определяются путем линейной интерполяции. Для H_y берется $z_T = 0$ (земная поверхность) и в этом случае граничное условие на верхней границе задано точно, поскольку известно, что на границе с изолятором $H_y(x, 0) = \text{const}$.

Рассматриваемая область покрывается прямоугольной сеткой с координатами z_k ($k = 0, \dots, m + 1$), x_j ($j = 0, \dots, n + 1$); $z_{m_0} = 0$ отвечает земной поверхности. Имеем $x_L = x_0$, $x_R = x_{n+1}$, $z_B = z_{m+1}$, $z_T = z_0$ для E_y и $z_T = 0$ для H_y .

Уравнения Гельмгольца (1) аппроксимируются линейными конечно-разностными уравнениями:

$$p_{k-1,j}E_{k-1,j} + p_{k,j}E_{k+1,j} + q_{k,j-1}E_{k,j-1} + q_{k,j}E_{k,j+1} - r_{k,j}E_{k,j} = 0,$$

$$k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_{k-1,j}H_{k-1,j} + u_{k,j}H_{k+1,j} + v_{k,j-1}H_{k,j-1} + v_{k,j}H_{k,j+1} - w_{k,j}H_{k,j} = 0,$$

$$k = m_0 + 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k, \quad \Delta x_j = x_{j+1} - x_j,$$

$$\sigma(x, z) = \sigma_{k,j}, \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad z_k < z < z_{k+1},$$

$$E_{k,j} = E_y(x_j, z_k), \quad k = 0, \dots, m+1, \\ j = 0, \dots, n+1,$$

$$p_{k,j} = \frac{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j}{2\Delta z_k}, \quad k = 0, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n,$$

$$q_{k,j} = \frac{\Delta z_{k-1} + \Delta z_k}{2\Delta x_j}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n,$$

$$r_{k,j} = p_{k-1,j} + p_{k,j} + q_{k,j-1} + q_{k,j} +$$

$$+ i \frac{\omega \mu_0}{4} (\sigma_{k-1,j-1} \Delta z_{k-1} \Delta x_{j-1} + \sigma_{k,j-1} \Delta z_k \Delta x_{j-1} +$$

$$+ \sigma_{k-1,j} \Delta z_{k-1} \Delta x_j + \sigma_{k,j} \Delta z_k \Delta x_j),$$

$$k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$H_{k,j} = H_y(x_j, z_k), \quad k = m_0, \dots, m+1,$$

$$j = 0, \dots, n+1,$$

$$u_{k,j} = \frac{1}{2\Delta z_k} \left(\frac{\Delta x_{j-1}}{\sigma_{k,j-1}} + \frac{\Delta x_j}{\sigma_{k,j}} \right),$$

$$k = m_0, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$v_{k,j} = \frac{1}{2\Delta x_j} \left(\frac{\Delta z_{k-1}}{\sigma_{k-1,j}} + \frac{\Delta z_k}{\sigma_{k,j}} \right),$$

$$k = m_0 + 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n,$$

$$w_{k,j} = u_{k-1,j} + u_{k,j} + v_{k,j-1} + v_{k,j} +$$

$$+ i \frac{\omega \mu_0}{4} (\Delta z_{k-1} + \Delta z_k) (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j),$$

$$k = m_0 + 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Системы этих линейных уравнений могут быть записаны в матричном виде:

$$\mathbf{Ae} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Bh} = \mathbf{c}, \quad (2)$$

где $e_{(j-1)m+k} = E_{k,j}$, $h_{(j-1)m+k-m_0} = H_{k,j}$ для точек внутри рассматриваемой области, а \mathbf{b} и \mathbf{c} образуются при переносе в правую часть членов, содержащих граничные значения $E_{k,j}$ и $H_{k,j}$. Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} являются пятидиагональными, симметричными, комплексными матрицами с положительно определенной действительной частью. Наилучшим способом решения таких систем линейных уравнений является метод Банашевича–Холецкого разложения ленточной матрицы [Wieladek et al., 1981].

Значения E_y и H_y на левой ($j = 0$) и правой ($j = n + 1$) границах области определяются из уравнений для слоистой среды:

$$\begin{bmatrix} E_{m+1} \\ E'_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\kappa_{m+1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E_k \\ E'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \kappa_k \Delta z_k & -\frac{1}{\kappa_k} \sinh \kappa_k \Delta z_k \\ -\kappa_k \sinh \kappa_k \Delta z_k & \cosh \kappa_k \Delta z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ E'_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$k = m, \dots, m_0,$$

$$E_k = E_{m_0} - E'_{m_0} \sum_{l=k}^{m_0-1} \Delta z_l, \quad k = m_0 - 1, \dots, 0,$$

$$\begin{bmatrix} H_{m+1} \\ \frac{1}{\kappa_{m+1}^2} H'_{+,m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\kappa_{m+1}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} H_k \\ \frac{1}{\kappa_k^2} H'_{+,k} \end{bmatrix} = \quad (4)$$

$$= \begin{bmatrix} \cosh \kappa_k \Delta z_k & -\kappa_k \sinh(\kappa_k \Delta z_k) \\ -\frac{1}{\kappa_k} \sinh(\kappa_k \Delta z_k) & \cosh \kappa_k \Delta z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{k+1} \\ \frac{1}{\kappa_{k+1}^2} H'_{+,k+1} \end{bmatrix},$$

$$k = m, \dots, m_0,$$

где штрихи означают дифференцирование соответствующих компонент поля по оси z , а $\kappa_k = (1 + i)\sqrt{0.5\omega\mu_0\sigma_k}$.

Полагается, что для левой границы

$$\kappa_k = (1 + i)\sqrt{0.5\omega\mu_0\sigma_{k,0}},$$

$$E_{k,0} = E_k/E'_{m_0}, \quad H_{k,0} = H_k/H_{m_0},$$

а для правой границы

$$\kappa_k = (1+i)\sqrt{0.5\omega\mu_0\sigma_{k,n}},$$

$$E_{k,n+1} = E_k/E'_{m_0}, \quad H_{k,n+1} = H_k/H_{m_0}.$$

Значения на верхней ($k=0$ для E_y , $k=m_0$ для H_y) и нижней ($k=m+1$) границах получаются в результате линейной интерполяции

$$E_{0,j} = \frac{x_{n+1}-x_j}{x_{n+1}-x_0}E_{0,0} + \frac{x_j-x_0}{x_{n+1}-x_0}E_{0,n+1},$$

$$E_{m+1,j} = \frac{x_{n+1}-x_j}{x_{n+1}-x_0}E_{m+1,0} + \frac{x_j-x_0}{x_{n+1}-x_0}E_{m+1,n+1}, \quad (5)$$

$$H_{m_0,j} = 1,$$

$$H_{m+1,j} = \frac{x_{n+1}-x_j}{x_{n+1}-x_0}H_{m+1,0} + \frac{x_j-x_0}{x_{n+1}-x_0}H_{m+1,n+1}.$$

В точке x_j земной поверхности определяются следующие функции:

1. Импеданс Z_{yx} , амплитуда и фаза кажущегося сопротивления ρ_{yx} и Φ_{yx} :

$$Z_{yx}(x_j) = \frac{E_y(x_j, 0)}{H_x(x_j, 0)}, \quad \rho_{yx} = \frac{1}{\omega\mu_0}|Z_{yx}|^2,$$

$$\Phi_{yx} = 2 \arg Z_{yx} - \pi/4,$$

$$H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y.$$

2. Импеданс Z_{xy} , амплитуда и фаза кажущегося сопротивления ρ_{xy} и Φ_{xy} :

$$Z_{xy}(x_j) = \frac{E_x(x_j, 0)}{H_y(x_j, 0)}, \quad \rho_{xy} = \frac{1}{\omega\mu_0}|Z_{xy}|^2,$$

$$\Phi_{xy} = 2 \arg Z_{xy} - \pi/4,$$

$$E_x = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial z} H_y.$$

3. Типпер (магнитное отношение) C , его вещественная и мнимая части C_u и C_v :

$$C(x_j) = -\frac{H_z(x_j, 0)}{H_x(x_j, 0)}, \quad C_u = \operatorname{Re}(C), \quad C_v = \operatorname{Im}(C),$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} E_y, \quad H_x = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_y.$$

Частные производные $\frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ определяются с помощью квадратичной интерполяции, а производная $\frac{\partial H_y}{\partial z}$ – с помощью линейной интерполяции

$$\frac{\partial E_y(x_j, 0)}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x_{j-1} + \Delta x_j} \times$$

$$\times \left(\frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1}} (E_{m_0,j} - E_{m_0,j-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta x_{j-1}}{\Delta x_j} (E_{m_0,j+1} + E_{m_0,j}) \right) = \boldsymbol{\alpha}_j^T \mathbf{e},$$

$$\frac{\partial E_y(x_j, 0)}{\partial z} \approx \frac{1}{\Delta z_{m_0-1} + \Delta z_{m_0}} \times \quad (6)$$

$$\times \left(\frac{\Delta z_{m_0}}{\Delta z_{m_0-1}} (E_{m_0,j} - E_{m_0-1,j}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta z_{m_0-1}}{\Delta z_{m_0}} (E_{m_0+1,j} + E_{m_0,j}) \right) = \boldsymbol{\beta}_j^T \mathbf{e},$$

$$\frac{\partial H_y(x_j, 0)}{\partial z} \approx \frac{1}{\Delta z_{m_0}} (H_{m_0+1,j} - H_{m_0,j}) = \boldsymbol{\gamma}_j^T \mathbf{h}.$$

Двумерная обратная задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_l]^T, \quad \theta_k = \ln \sigma_k,$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) = [f_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, f_L(\boldsymbol{\theta})]^T,$$

$$\mathbf{d} = [d_1, \dots, d_L]^T, \quad \mathbf{W} = \operatorname{diag}([w_1, \dots, w_L]^T),$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – электропроводность; $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ – функционалы электропроводности $\ln \rho_{xy}$, $\ln \rho_{yx}$, Φ_{xy} , Φ_{yx} , C_u и C_v , определяемые в точках профиля x_j на частотах ω ; \mathbf{d} – наблюдаемые данные; \mathbf{W} – веса. Требуется определить неизвестный вектор $\boldsymbol{\theta}$ такой, при котором достигается минимум

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{W}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{d})\|.$$

Эта нелинейная задача может быть решена с помощью итерационного метода Марквардта. При этом на каждом шаге делается следующее. Если $\boldsymbol{\theta}$ представляет собой приближенное решение, то следующее приближение $\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}$ находится по формуле

$$\delta\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{f}'(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W}^2 \mathbf{f}'(\boldsymbol{\theta}) + \lambda^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{f}'(\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{W}^2 (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})),$$

которое в результате применения сингулярного разложения матрицы $\mathbf{Wf}'(\boldsymbol{\theta})$

$$\mathbf{Wf}'(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}^T = [\mathbf{S}, \mathbf{0}]^T,$$

$$\mathbf{S} = \operatorname{diag}([s_1, \dots, s_l]^T), \quad s_k \geq 0$$

принимает вид

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{V}[\boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \lambda^2 \mathbf{I}]^{-1} \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{U}^T \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})) =$$

$$= \mathbf{V}\mathbf{S}_\lambda \mathbf{U}^T \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})),$$

где $\mathbf{S}_\lambda = \operatorname{diag}([s_{\lambda,1}, \dots, s_{\lambda,l}]^T)$, $s_{\lambda,k} = \frac{s_k}{s_k^2 + \lambda^2}$.

Параметр λ можно выбрать таким образом, чтобы итерационный процесс был сходящимся. Это, однако, потребует многочисленных вычислений значений $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta})$, что делает задачу очень громоздкой. Поэтому мы оставим свой выбор на значениях λ , которые ограничивают величину поправки $\delta\boldsymbol{\theta}$. Для этого достаточно допустить, что

$$\lambda^2 = \max \left\{ 0, \max_{0 < k \leq l} s_k \left(\frac{|\mathbf{U}^T \mathbf{W}(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}))_k|}{\varepsilon} \right) \right\},$$

и тогда

$$|(\mathbf{V}^T \delta\boldsymbol{\theta})_k| \leq \varepsilon, \quad |(\delta\boldsymbol{\theta})_k| \leq \varepsilon \sqrt{l}$$

и $\left| \ln \left(1 + \frac{\delta\sigma_k}{\sigma_k} \right) \right| \leq \varepsilon \sqrt{l}.$

Рассмотрим теперь особенности расчета частных производных функционала \mathbf{f} , необходимых для выполнения итераций в методе Марквардта. Из определений импедансов и магнитного отношения с учетом уравнений (6) следует, что элементы функционала \mathbf{f} выражаются функциями вида

$$\frac{\boldsymbol{\Phi}_E^T \mathbf{e}}{\boldsymbol{\Psi}_E^T \mathbf{e}}, \quad \frac{\boldsymbol{\Phi}_H^T \mathbf{h}}{\boldsymbol{\Psi}_H^T \mathbf{h}},$$

где $\boldsymbol{\Phi}_E, \boldsymbol{\Phi}_H, \boldsymbol{\Psi}_E$ и $\boldsymbol{\Psi}_H$ – векторы, не зависящие от $\boldsymbol{\theta}$. Дифференцируя эти выражения по $\boldsymbol{\theta}_k$ и принимая во внимание производные уравнений (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \frac{\boldsymbol{\Phi}_E^T \mathbf{e}}{\boldsymbol{\Psi}_E^T \mathbf{e}} &= \left(\frac{1}{\boldsymbol{\Psi}_E^T \mathbf{e}} \right)^2 \times \\ &\times (\boldsymbol{\Psi}_E^T \mathbf{e} \boldsymbol{\Phi}_E^T - \boldsymbol{\Phi}_E^T \mathbf{e} \boldsymbol{\Psi}_E^T) \mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \mathbf{e} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \frac{\boldsymbol{\Phi}_H^T \mathbf{h}}{\boldsymbol{\Psi}_H^T \mathbf{h}} &= \left(\frac{1}{\boldsymbol{\Psi}_H^T \mathbf{h}} \right)^2 \times \\ &\times (\boldsymbol{\Psi}_H^T \mathbf{h} \boldsymbol{\Phi}_H^T - \boldsymbol{\Phi}_H^T \mathbf{h} \boldsymbol{\Psi}_H^T) \mathbf{B}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k} \mathbf{h} \right). \end{aligned}$$

Правые части \mathbf{b} и \mathbf{c} систем линейных уравнений (2) задаются исходя из значений полей E_y и H_y на границах области моделирования. Эти значения рассчитываются, исходя из уравнений (3) и (4) для слоистой среды (левая и правая границы) и из уравнений (5) (верхняя и нижняя границы). Для того, чтобы определить производные $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}$ и $\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \boldsymbol{\theta}_k}$, нужно продифференцировать эти уравнения. Умножение на матрицы \mathbf{A}^{-1} и \mathbf{B}^{-1} сводит задачу к решению систем линейных уравнений для треугольных матриц, которые уже были рассчитаны при определении \mathbf{e} и \mathbf{h} .

ГРАФИЧЕСКИЙ ИНТЕРФЕЙС ПРОГРАММЫ

Рассматриваемая программа инверсии (далее – программа Новожинского) снабжена графическим пользовательским интерфейсом, предназначенным для работы в 32-битных операционных системах семейства Microsoft Windows. Его наличие позволяет свести к минимуму число ошибок, возникающих на этапах составления моделей и анализа результатов, а также многократно ускорить и значительно упростить оба этих этапа.

Основная особенность данного графического интерфейса заключается в том, что от пользователя не требуется никаких знаний о структуре файла данных программы инверсии. Все данные задаются в четырех диалоговых окнах (рис. 1). В первые два вводятся размеры сетки и ячеек. В третьем с помощью “мыши” или клавиш управления курсором рисуется модель среды и задается положение точек наблюдения. Наконец, четвертое диалоговое окно предназначено для ввода и просмотра полевых данных. Введенная информация записывается в файл данных. Следует отметить, что с помощью рассмотренной системы диалоговых окон можно как создавать новые, так и редактировать имеющиеся файлы.

На этапе анализа результатов расчета в верхней части экрана в виде кривых зондирования или графиков профилирования отображаются полевые и расчетные данные, а в нижней – модель среды (рис. 2). Существует также возможность просмотра графиков изменения различных параметров с ходом итерационного процесса.

СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММЫ НОВОЖИНСКОГО С ПРОГРАММАМИ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ

Важным средством исследования точности решения прямой задачи является сравнение с другими программами на текстовых моделях [Жданов и др., 1990]. С этой целью был выполнен ряд расчетов прямых задач с помощью программы Новожинского и трех программ моделирования, основанных на разных численных методах.

Наиболее близка к рассматриваемой программа, в основном связанная с именем Дж. Вивера (Канада, ун-т города Виктория), первоначальный вариант которой описан в работе [Brewitt-Taylor and Weaver, 1976]. Эта программа также является конечно-разностной, однако обладает рядом существенных отличий. Так, граничные условия на нижней границе области моделирования в ней определяются исходя из предположения, что в основании разреза залегает идеальный проводник. В случае E-поляризации на верхней границе этой области используются асимптотические граничные условия [Weaver and Brewitt-Taylor, 1978]. При конечно-

Grid

Number of meshes along Z above the surface : Number of meshes along Z above the surface : Number of meshes along X :

Number of parts to divide mesh : Number of parts to divide mesh : Number of parts to divide mesh :

Additional large meshes at left and at right

Meshes

Mesh sizer (in km) along Z above the surface (from top to bottom) Mesh sizer (in km) along Z under the surface (from top to bottom) Mesh sizer (in km) along X (from left to right)

| | | | | | |
|---|------|---|--------|---|-----|
| 1 | 20 | 1 | 0.0025 | 1 | 0.2 |
| 2 | 10 | 2 | 0.0025 | | |
| 3 | 5.12 | 3 | 0.005 | | |
| 4 | 2.56 | 4 | 0.005 | | |
| 5 | 1.28 | 5 | 0.0075 | | |
| 6 | 0.64 | 6 | 0.0075 | | |
| 7 | 0.32 | 7 | 0.01 | | |
| 8 | 0.16 | 8 | 0.01 | | |

All meshes one size All meshes one size All meshes one size

Model

| | | | |
|----|----|----|----|
| 14 | 14 | 14 | 14 |
|----|----|----|----|

Curves

| T | Re | Fe | Rh | Fh | Cu | Cv |
|-------|-------|--------|-------|--------|---------|---------|
| 0.128 | * | * | 15.98 | -17.54 | 0.0017 | * |
| 0.512 | 7.753 | -40.17 | 9.871 | -16.37 | -0.0039 | -0.0039 |
| 2 | 3.677 | -35.59 | 8.267 | 19.07 | -0.0145 | 0.0318 |
| 8 | 2.122 | 6.701 | 17.87 | 54.84 | 0.0651 | 0.0674 |
| 32 | 5.036 | 62.55 | 58.4 | 47.88 | 0.112 | 0.0147 |
| 128 | 18.16 | 56.42 | 94.11 | -6.24 | * | -0.0213 |
| 512 | 36.06 | 15.77 | 48.36 | -41.1 | * | -0.0428 |

=RE =Rh =Fe =Fh =Cu =Cv

Рис. 1. Диалоговые окна, предназначенные для ввода данных.

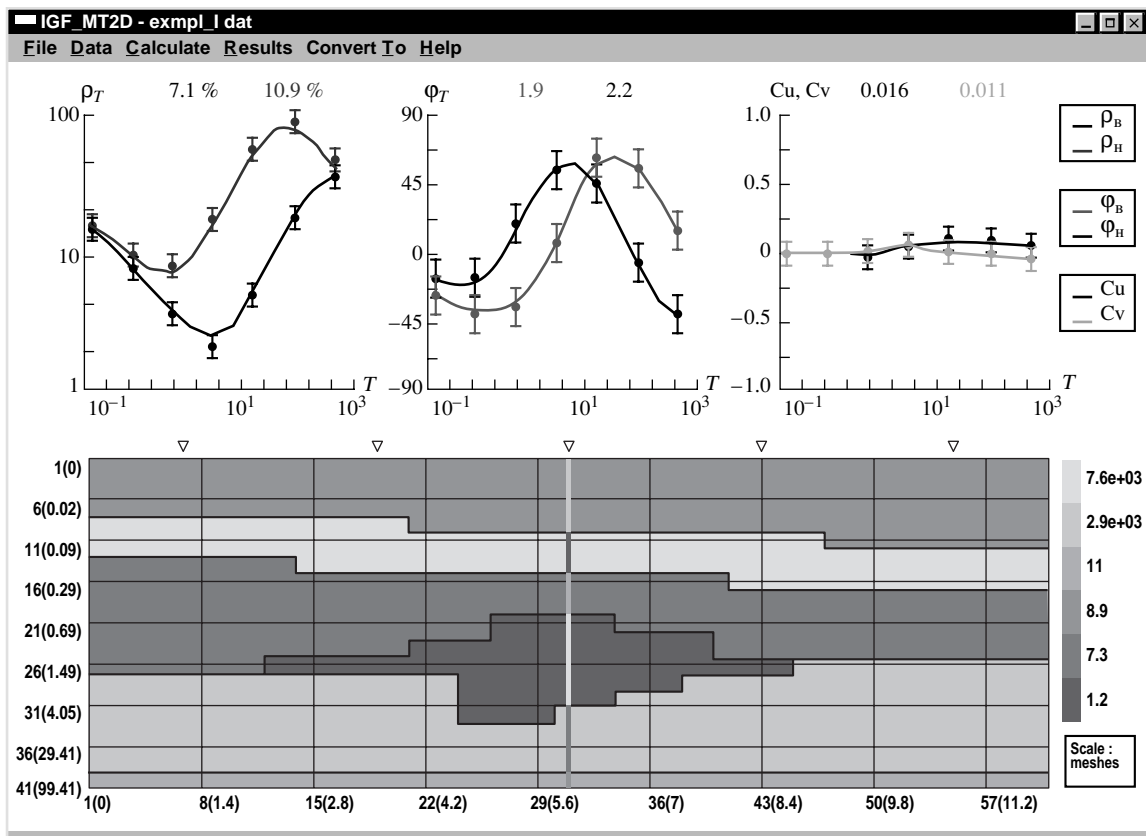


Рис. 2. Главное окно, предназначенное для анализа результатов.

разностной аппроксимации уравнений Гельмгольца применяется непосредственная замена дифференциальных операторов разностными аналогами. Наконец, в программе Вивера используются более сложные формулы расчета компонент поля, не входящих в разностную схему [Weaver et al., 1985; Weaver et al., 1986].

Вторая программа, взятая для сравнения, создана группой Ф. Ваннамейкера (США, ун-т штата Юта). Она основана на методе конечных элементов. Область моделирования разбивается на прямоугольные элементы, каждый из которых своими диагоналями может быть разбит на четыре треугольных элемента [Wannamaker et al., 1987]. Такая аппроксимация позволяет моделировать наклонные границы и, в частности, рельеф земной поверхности [Wannamaker et al., 1986]. Однако мы задавали однородные прямоугольные элементы, чтобы они отвечали ячейкам, используемым в конечно-разностных программах.

Для большей определенности мы также задействовали в своих расчетах программу В.И. Дмитриева и Е.Е. Поздняковой (лаборатория мат. физики ВМК МГУ), использующую метод интегральных уравнений. Она предназначена для расчета поля в слоистой среде, содержащей произвольную двумерную неоднородность. Многие особенности

алгоритма этой программы рассмотрены в [Дмитриев и Позднякова, 1989; 1990; 1991] для более общего трехмерного случая.

Ограниченный объем статьи позволяет нам привести результаты расчета лишь для одной простой модели (рис. 3А). Она включает три слоя, имитирующие проводящий осадочный чехол, высокоомные породы литосферы и низкоомную астеносферу. Во втором слое содержится проводящая неоднородность. Кривые кажущегося сопротивления для обеих поляризаций поля, рассчитанные в точке земной поверхности, расположенной над центром неоднородности, приведены на рис. 3Г. Проводящая неоднородность, находящаяся во втором слое, хорошо видна на продольных (отвечающих Е-поляризации) и не проявляется на поперечных (отвечающих Н-поляризации) кривых вследствие экранирования высокоомными породами литосферы [Бердичевский и др., 1997].

При расчетах по программам, основанным на методах дифференциальных уравнений, размер сетки по горизонтали составил 32 ячейки, а по вертикали – 32 ячейки для Н-поляризации и 42–48 ячеек для Е-поляризации (с учетом ячеек в воздухе). Результат был получен для 26 периодов (от 0.07 до 10^6 с с геометрическим шагом 1.93). Кривые,

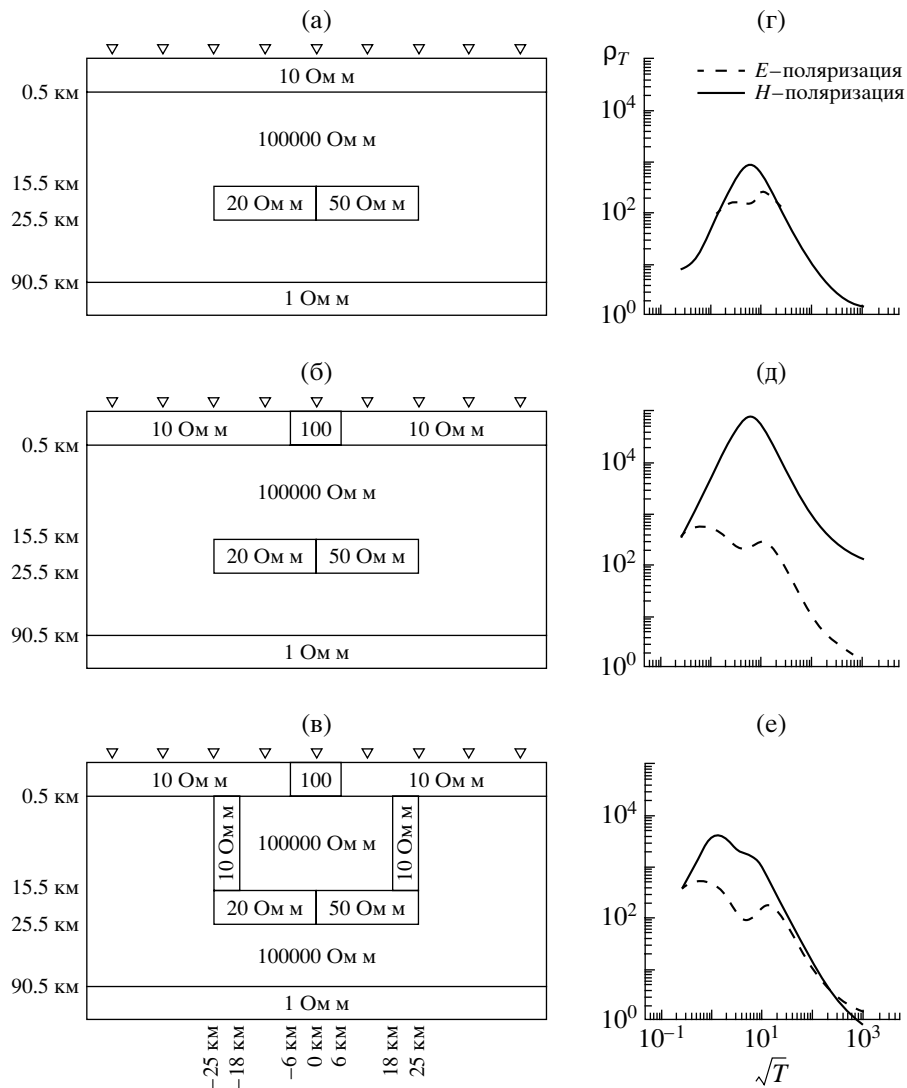


Рис. 3. Разрезы моделей и кривые кажущегося сопротивления.

рассчитанные по разным программам, практически совпали. Так, для центральной точки профиля среднеквадратичные невязки результатов, полученных по программе Новожинского и по другим программам, составили для E-поляризации 0.26% – при сравнении с программой Вивера, 0.83% – с программой Ваннамейкера, 1.00% – с программой Дмитриева–Поздняковой, и для H-поляризации 0.16% – при сравнении с программой Вивера, 0.73% – с программой Ваннамейкера, 0.70% – с программой Дмитриева–Поздняковой. Время счета кривых для обеих поляризации по разным программам составило 10 секунд и более на современном персональном компьютере (ПК), причем наиболее быстрыми оказались программы Ваннамейкера и Новожинского.

СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММЫ НОВОЖИНСКОГО С ПРОГРАММОЙ ВАРЕНЦОВА–ГОЛУБЕВА

Основные преимущества и недостатки программ могут быть выявлены путем сравнения с другими аналогичными программами. Наиболее крупным проектом, посвященным сравнению программ двумерной инверсии МТ-данных, стал проект COPROD2 [Jones, 1993], в рамках которого применялось более десяти программ для интерпретации полевых данных, полученных в одном из районов Канады. В настоящее время ведутся работы по сравнению программ на основе интерпретации модельных данных (проект COPROD-2S). В данной работе мы приводим результаты небольшого набора модельных экспе-

риментов, направленного на сопоставление программы Новожи́нского с другими программами.

Первая программа, использованная нами для этой цели, написана И.М. Варенцовым и Н.Г. Голубевым (лаборатория численных методов геоэлектрики ИГЭМИ РАН) [Golubev and Varentsov, 1994; Варенцов и Голубев, 1995]. В этой программе прямая задача решается методом конечных разностей, причем применяется 5-точечная схема численного дифференцирования и граничные условия Дирихле. При решении обратной задачи среда разбивается на блоки, сопротивления которых оптимизируются. При этом сопротивления некоторых блоков могут быть зафиксированы. Программа основана на теории регуляризации Тихонова с использованием ряда приемов, характерных для статистических подходов. Программа обладает многофункциональным графическим интерфейсом.

Для инверсии были взяты данные, рассчитанные на 9 периодах (от 0.27 до 10^4 с с геометрическим шагом 3.7) в 9 точках профиля для модели А, схема которой приведена на рис. 3А. Данные были рассчитаны по программе Вивера, после чего зашумлены. Шум отвечал логнормальному распределению со стандартом 7.5% для кажущегося сопротивления, нормальному распределению со стандартом 3° для фазы импеданса и 0.03 для типперов. Кроме того, в соответствии с этим же законом распределения кривые кажущегося сопротивления были подвергнуты небольшим статическим смещениям. Поскольку поперечные кривые в данном случае не чувствительны к проводящей неоднородности, интерпретировались лишь продольные кривые и типперы.

Стартовые модели и результаты инверсии приведены на рис. 4. На этом рисунке над разрезом каждой модели приведены среднеквадратичные невязки для каждой точки профиля (в верхнем ряду – для действительных типперов или кажущихся сопротивлений, в нижнем ряду – для мнимых типперов или фаз импеданса), сбоку и снизу подписаны глубины и абсциссы точек профиля (в км), внутри блоков указаны их сопротивления (в Ом м), причем фиксированные сопротивления обведены овалами.

На первом этапе была выполнена инверсия типперов. Для этого была выбрана стартовая модель А(С) (рис. 4), представляющая собой трехслойную среду и позволяющая программам выделить неоднородность в широком диапазоне глубин почти на всем протяжении профиля. При этом положение границ блоков не совпадало с положением истинных границ неоднородности. Обе программы указали, что аномально низкие значения сопротивления относятся к области, включающей четыре центральных блока (итоговые модели А(С) на рис. 4), что соответствует действитель-

ности. Невязки в процессе подбора уменьшились примерно вдвое, и стали отвечать уровню шума.

На втором этапе выполнялась инверсия продольных кажущихся сопротивлений и фаз импеданса. Центральная область была разбита на девять более мелких блоков (стартовая модель А(Е)), причем теперь верхняя и нижняя границы их среднего ряда совпали с истинными границами неоднородности. По горизонтали, однако, неоднородность оказалась разбита не на две, а на три части. Тем не менее, в результате инверсии (итоговая модель А(Е)) обе программы неплохо выделали неоднородность.

Отметим, что размеры сетки при расчетах по обеим программам составляли 40×28 ячеек, число итераций достигало нескольких десятков, а время счета на ПК составило порядка 1 мин для программы Новожи́нского и порядка 5 мин для программы Варенцова–Голубева.

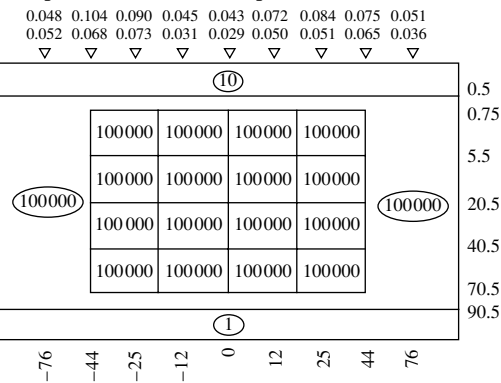
Таким образом, в рассмотренном случае программы Новожи́нского и Варенцова–Голубева оказались примерно одинаковы по эффективности. Однако в некоторых случаях программа Варенцова–Голубева может обеспечить более надежный, устойчивый результат за счет предусмотренной в этой программе привязки к априорной информации посредством теории регуляризации Тихонова.

СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММЫ НОВОЖИ́НСКОГО С ПРОГРАММОЙ МАККИ

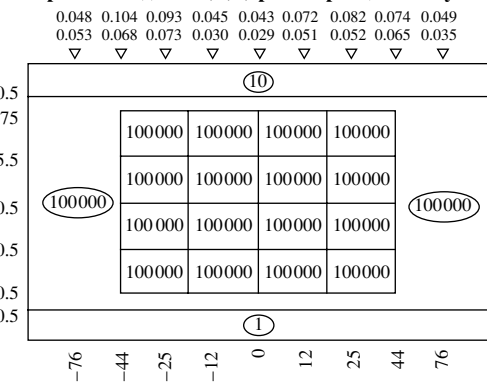
Следующая программа инверсии, с которой мы сравнивали программу Новожи́нского, создана Р. Макки с соавторами (США, компания GSY-USA и Массачусетский технологический институт) [Rodi and Mackie, 1998; Mackie et al., 1997]. Здесь прямая задача решается методом конечных разностей. В основе решения обратной задачи лежит теория регуляризации Тихонова. При этом в качестве априорной используется информация о гладкости получаемого распределения сопротивления (за исключением скачков сопротивления, заданных в стартовой модели). Минимизация функционала осуществляется методом нелинейных сопряженных градиентов. Программа позволяет фиксировать некоторые значения сопротивлений.

Основное отличие программы Макки от программ Новожи́нского и Варенцова–Голубева заключается в том, что эта программа подбирает не сопротивления блоков заданной геометрии, состоящих из произвольного числа ячеек одинакового сопротивления, а сопротивление каждой ячейки по отдельности. При этом на модель накладывается условие гладкости. По нашему мнению, применение программ такого типа наиболее оправдано в случае недостаточно полной априор-

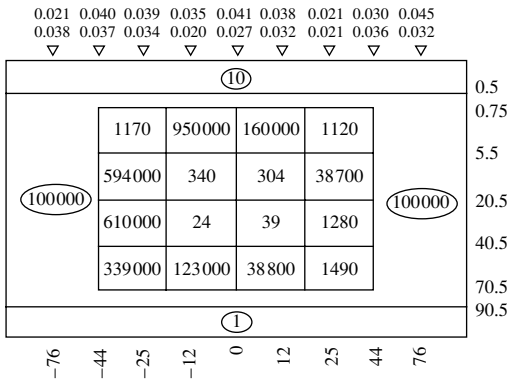
Стартовая модель A(C) (прог. Новожинского)



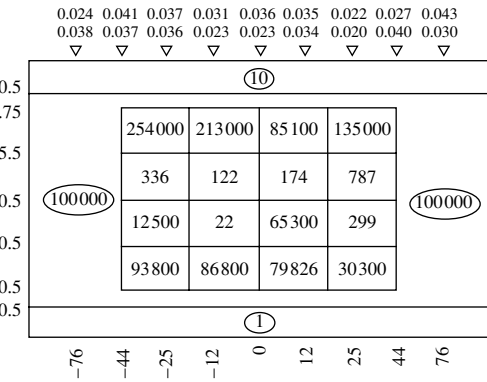
Стартовая модель A(C) (прог. Варенцова-Голубева)



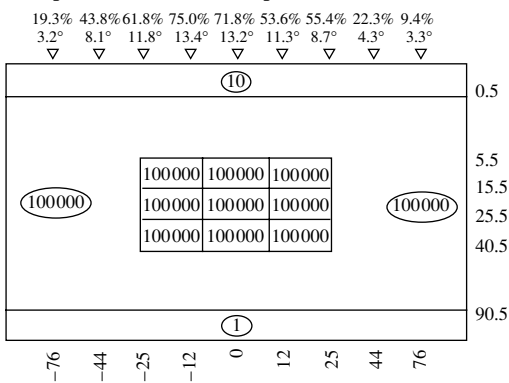
Итоговая модель A(C) (прог. Новожинского)



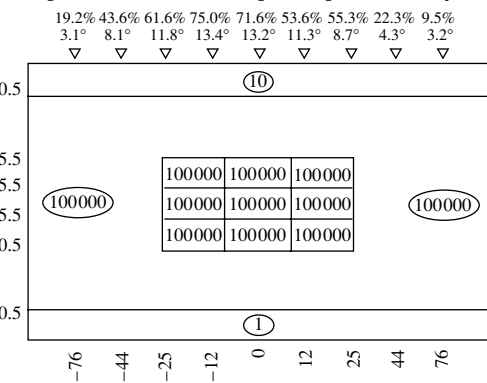
Итоговая модель A(C) (прог. Варенцова-Голубева)



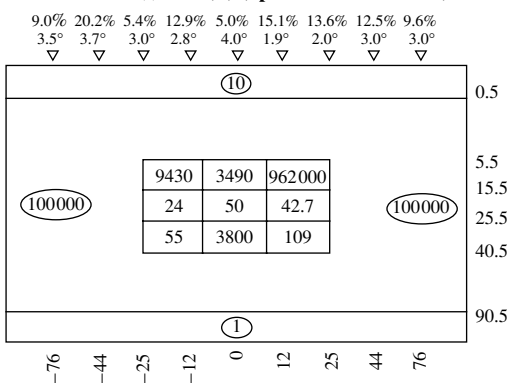
Стартовая модель A(E) (прог. Новожинского)



Стартовая модель A(E) (прог. Варенцова-Голубева)



Итоговая модель A(E) (прог. Новожинского)



Итоговая модель A(E) (прог. Варенцова-Голубева)

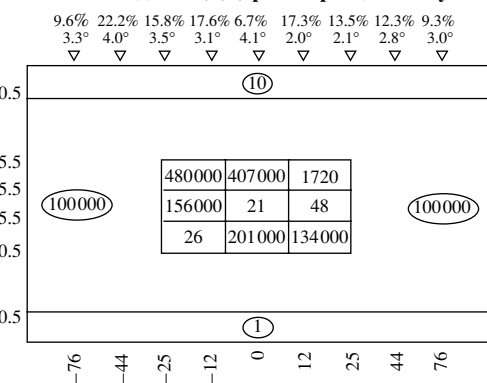


Рис. 4. Результаты инверсии по программам Новожинского и Варенцова-Голубева (модель A).

ной информации о геоэлектрической структуре изучаемого района. В этом случае такие программы позволяют выделить в разрезе основные аномальные области. Если же существуют одна или несколько гипотез о форме этих областей, то наиболее логичным нам представляется применение программы, работающей в рамках фиксированной геометрии.

Таким образом, на наш взгляд, программы, дающие сглаженное представление о разрезе, лучше применять на стадии поиска гипотез о положении основных неоднородностей. Программы, в которых геометрия модели полагается фиксированной, хорошо подходят для выбора гипотезы и более детального подбора данных.

В общем случае такое различие затрудняет сопоставление программ, находящихся сглаженное решение и решение в рамках фиксированной геометрии. Однако для ситуаций, когда мы имеем дело с несложными геоэлектрическими моделями, эти программы могут решать сходные задачи. Рассмотрим пример, в котором программы Новожиинского и Макки применяются для локализации глубинной и приповерхностной неоднородностей.

Исходные данные были рассчитаны для модели Б (рис. 3Б). Эта модель отличается от рассмотренной выше модели А наличием в осадочном чехле высокоомной вставки с сопротивлением 100 Ом м и шириной 12 км, приводящей к сильному статическому смещению поперечной кривой (рис. 3Д). Способ расчета и зашумления данных был таким же, как и в случае сравнения с программой Варенцова–Голубева.

Для получения информации о распределении сопротивления в чехле были использованы поперечные кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, как более чувствительные к приповерхностным структурам [Бердичевский и др., 1997]. В качестве стартовой модели были взята трехслойная модель, в которой сопротивления однородного обрамления и двух нижних слоев были зафиксированы (стартовые модели Б(Н) на рис. 5). Обе программы быстро и надежно выделили неоднородность в центре профиля (итоговые модели Б(Н) на рис. 5).

Затем полученный разрез верхнего слоя и сопротивление астеносферы были зафиксированы. На этом уровне интерпретации для выделения неоднородности в литосфере были взяты продольные кривые кажущегося сопротивления и фазы импеданса, поскольку они лучше чувствуют глубинные проводящие структуры [Бердичевский и др., 1997]. По обеим программам удалось получить неплохой результат (итоговые модели Б(Е) на рис. 5). Обе программы выделили неоднородность, правда, программа Новожиинского увеличила глубину правой части неоднородности, а программа Макки завысила ее сопротивление.

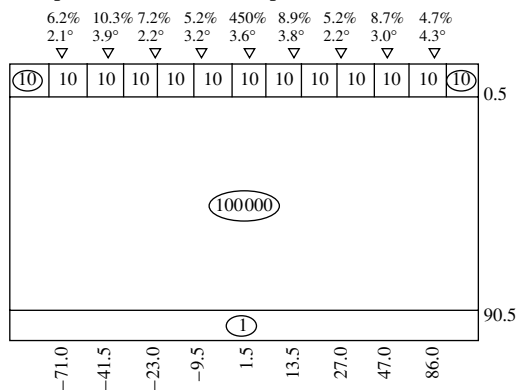
Отметим, что при расчетах по программе Новожиинского использовалась сетка, содержащая 78 ячеек по горизонтали и 20 ячеек по вертикали, а в программе Макки – 40 ячеек по горизонтали и 27 ячеек по вертикали (не считая ячейки в атмосфере). Различия в горизонтальных размерах секток объясняются желанием разместить точки профиля в одних и тех же местах, поскольку в программе Макки точки наблюдения относятся не к узлам, как в программе Новожиинского, а к серединам ячеек. Число ячеек по вертикали в программе Макки было увеличено для достижения приемлемой точности расчета этой программой прямой задачи. Время счета по программе Новожиинского составило примерно 1 мин для Н-поляризации и 3 минуты для Е-поляризации, а по программе Макки – 1.5 мин для Н-поляризации и 9 мин – для Е-поляризации. Программа Макки работала медленней, по-видимому, за счет того, что ей необходимо было подобрать гораздо большее число сопротивлений, чем программе Новожиинского. Возможно, впрочем, что при решении задач с большими объемами данных времена окажутся более близкими, поскольку метод нелинейных сопряженных градиентов менее восприимчив к росту количества данных [Rodi and Mackie, 1998].

СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММЫ НОВОЖИИНСКОГО С ПРОГРАММОЙ БУКЕРА–СМИТА

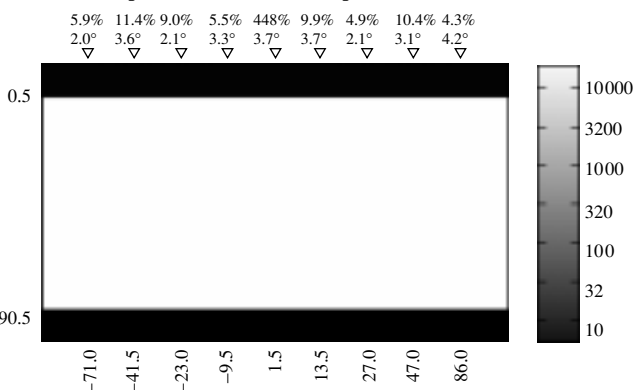
Программа Дж. Букера и Дж.Т. Смита (США, ун-т штата Вашингтон и Великобритания, Кембридж, Институт теоретической геофизики) также относится к программам, определяющим сопротивление каждой ячейки таким образом, чтобы получаемое распределение сопротивления удовлетворяло, с одной стороны, МТ-данным, а с другой, критерию гладкости [Smith and Booker, 1991; Wu et al., 1993]. Поскольку количество определяемых при этом сопротивлений велико, в программе Букера–Смита, как и в программе Макки, применяется специальный метод инверсии, в данном случае – метод быстрой релаксации [Smith and Booker 1991]. Этот метод заключается в том, что на каждой итерации при поиске следующего приближения двумерная обратная задача аппроксимируется серией псевдо-одномерных задач – по одной на каждую точку наблюдения, что значительно сокращает время инверсии. Сопротивления по определенным вертикальным профилям могут быть зафиксированы. Для решения прямой задачи применяется метод конечных разностей.

При сравнении программы Новожиинского с программой Букера–Смита использовалась модель В (рис. 3В), содержащая, помимо глубинной низкоомной и приповерхностной высокоомной неоднородностей, две проводящие вертикальные

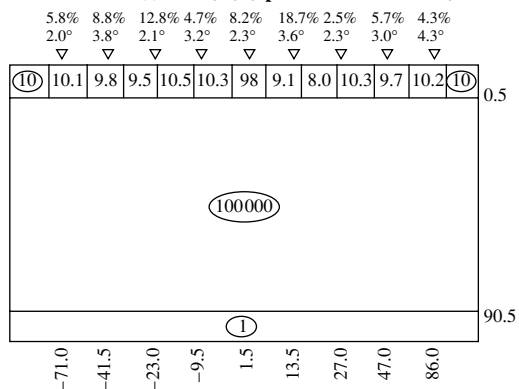
Стартовая модель Б(Н) (прог. Новожинского)



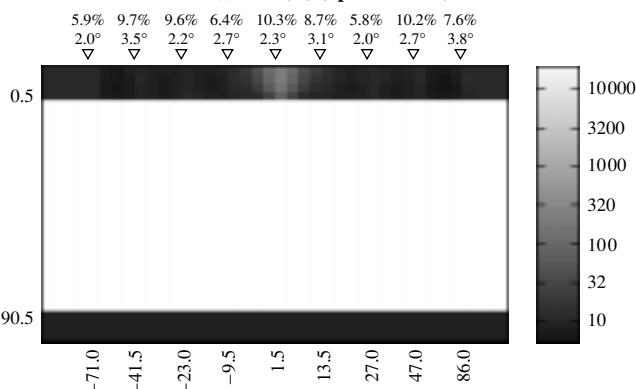
Стартовая модель Б(Н) (прог. Макки)



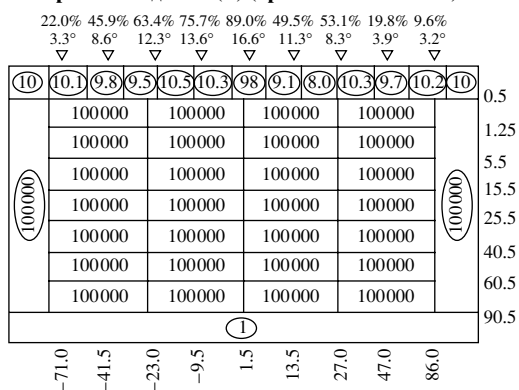
Итоговая модель Б(Н) (прог. Новожинского)



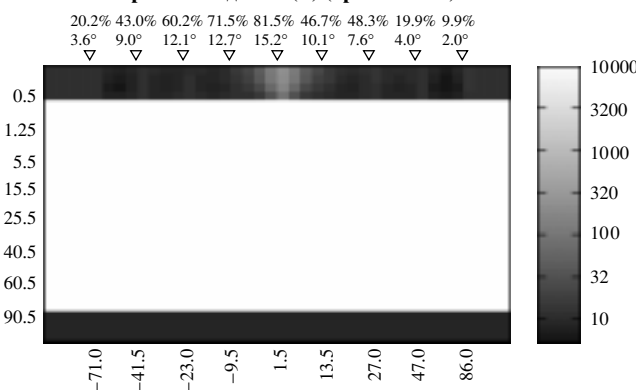
Итоговая модель Б(Н) (прог. Макки)



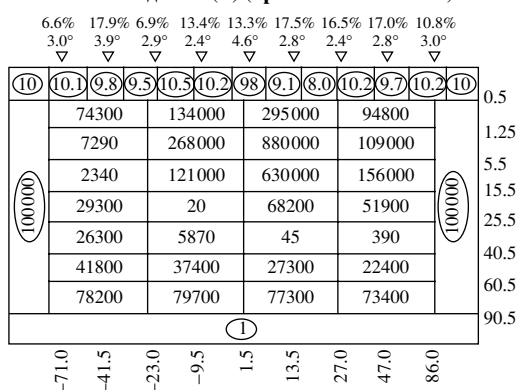
Стартовая модель Б(Е) (прог. Новожинского)



Стартовая модель Б(Е) (прог. Макки)



Итоговая модель Б(Е) (прог. Новожинского)



Итоговая модель Б(Е) (прог. Макки)

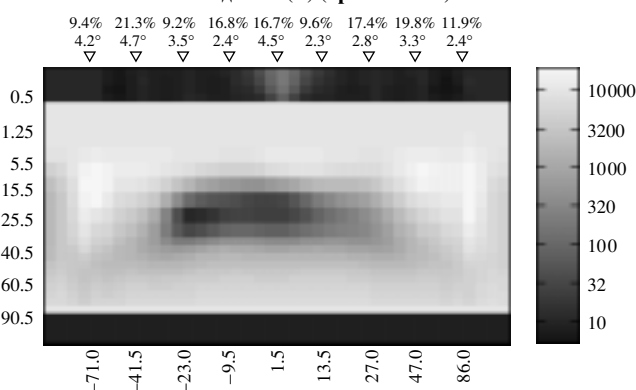


Рис. 5. Результаты инверсии по программам Новожинского и Макки (модель Б).

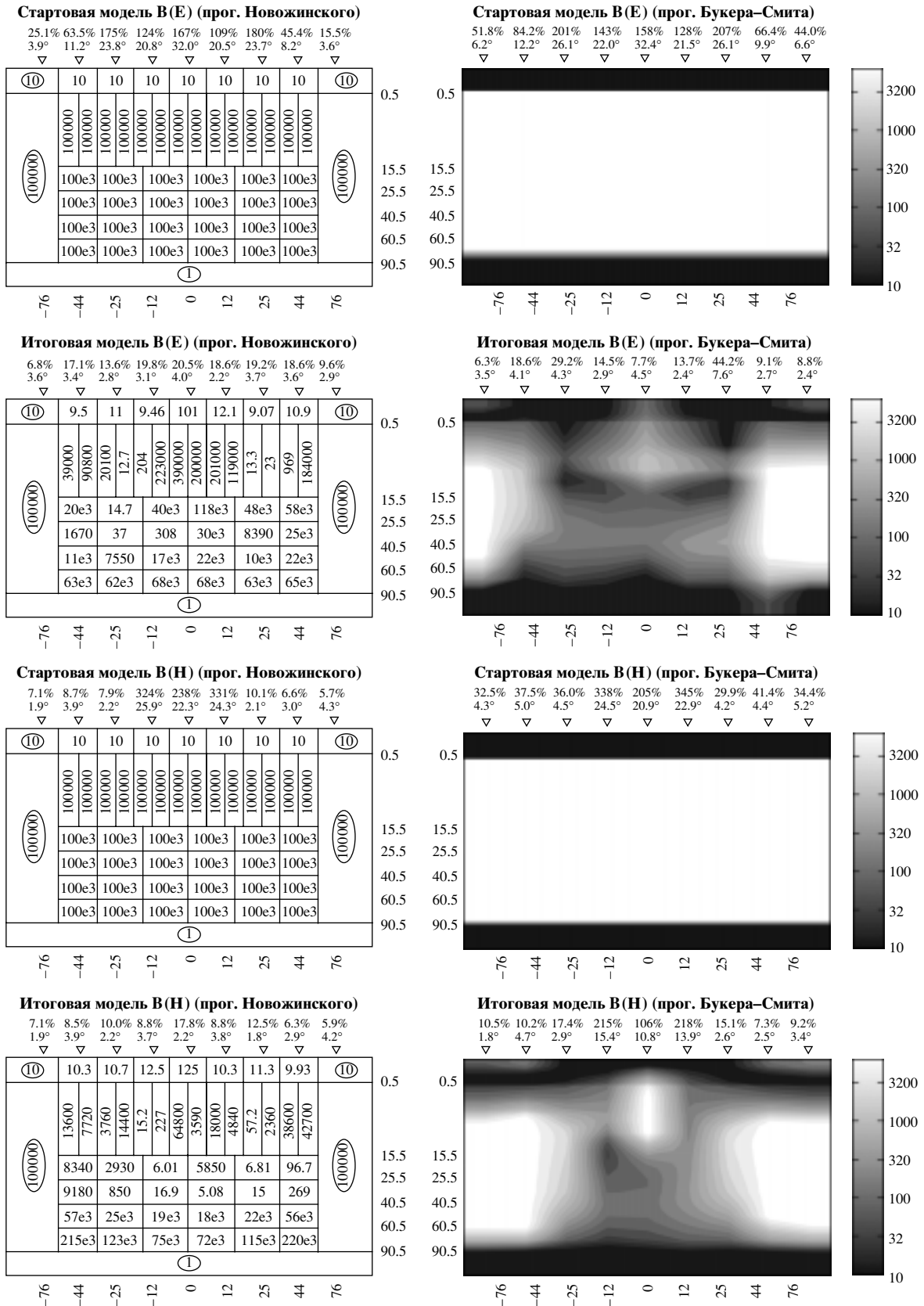


Рис. 6. Результаты инверсии по программам Новожи́нского и Бу́кера–Сми́та (модель В).

разломные зоны, соединяющие глубинную неоднородность с осадочным чехлом. Токи, текущие по чехлу вкрест структур, могут перетекать в глубинную неоднородность, вследствие чего поперечные кривые начинают чувствовать ее, что, в частности, отмечается перегибом на поперечной кривой над центром модели (рис. 3Е).

МТ-данные, как и в предыдущих случаях, были получены с помощью программы Вивера и зашумлены.

В качестве стартовых моделей были взяты трехслойные разрезы (рис. 6). Поскольку в программе Букера–Смита сопротивления относятся не к центрам ячеек, а к узлам, то мощности слоев для разных программ несколько различались. В программе Новожинского было выбрано клавишное разбиение на блоки, обеспечивающее субвертикальное строение верхней части литосферы.

Вначале рассмотрим результаты инверсии амплитудных и фазовых продольных кривых (стартовые и итоговые модели В(Е) на рис. 6). С помощью обеих программ удалось добиться достаточно небольших невязок. При этом, однако, программа Новожинского подобрала эквивалентную модель, в которой отсутствует горизонтальная проводящая неоднородность, соединяющая разломные зоны. Вместо этого программа увеличила ширину правой разломной зоны и поместила низкоомную неоднородность под левую разломную зону. Такой результат объясняется тем, что Е-поляризованное поле отражает, главным образом, интегральные эффекты [Бердичевский и др., 1997]. Программа Букера–Смита дала более близкий к истине результат, хотя и заметно уменьшила глубину до проводящей неоднородности, а также разомкнула цепь, состоящую из горизонтальной неоднородности и вертикальных разломных зон.

Теперь обратимся к результатам инверсии поперечных кривых (стартовые и итоговые модели В(Н) на рис. 6). Программа Новожинского дала хороший результат – выделила разломные зоны (блоки с сопротивлениями 15.2 и 57.2 Ом м) и проводящую неоднородность (5 блоков низкого сопротивления в средней части литосферы). Проводящие блоки образовали непрерывную цепь для протекания поперечного тока (горизонтальное звено этой цепи сместилось вниз). По причине небольшого количества точек наблюдения и резких градиентов сопротивления программа Букера–Смита в случае Н-поляризации дала лишь качественную картину. Однако, основные черты модели – наличие глубинной неоднородности и вертикальные разломные зоны оказались при этом выявлены.

При инверсии применялись сетки, в которых количество ячеек по горизонтали равнялось 40, а по вертикали – 48 при инверсии Н-поляризации по программе Букера–Смита, и 28 ячеек – в остальных случаях (считая 8 ячеек в воздухе). Время

счета составило: по программе Новожинского – 3 мин 40 с в случае Е-поляризации и 1 мин 20 с в случае Н-поляризации, по программе Букера–Смита – 45 с в случае Е-поляризации и 30 с в случае Н-поляризации. Эти результаты демонстрируют удивительную скорость работы программы, основанной на методе быстрой релаксации [Smith and Booker, 1991].

Заканчивая данный раздел, подчеркнем, что приведенные примеры инверсии данных демонстрируют способность программ минимизировать невязки и восстанавливать геоэлектрическую структуру несложных моделей, но имеют мало общего со сложным и многоитерационным процессом интерпретации реальных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные программы инверсии могут быть разделены на две группы. Первая включает программы, позволяющие получить сглаженное распределение сопротивления, содержащее минимальное количество структур (программы Макки и Букера–Смита), а вторая – программы, работающие в рамках фиксированной геометрии модели, допускающей любые масштабы интегрирования структур (программы Новожинского и Варенцова–Голубева). Программы первой группы наиболее эффективны на этапе построения интерпретационной модели, так как позволяют оконтурить зоны повышенных и пониженных сопротивлений. Причем такой подход может быть особенно полезен в трехмерном случае. Область применения программ второй группы, на наш взгляд, включает в себя:

1) интерпретацию в режиме проверки гипотез [Бердичевский и др., 1999], направленную на выбор наиболее пригодной гипотезы о строении региона, обеспечивающей наилучшее совпадение полевых и расчетных данных;

2) детализацию геоэлектрического разреза в интерактивном режиме.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Е. Янковскому и проф. М.Н. Бердичевскому, по инициативе которых была выполнена настоящая работа, а также В.Ю. Семенову за полезные советы в области разработки графического интерфейса.

Работа проведена при поддержке РФФИ, проект 99-05-64758 и КВН, грант 9 Т12В 025 15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бердичевский М.Н., Ваньян Л.Л., Кошурников А.В. Магнитотеллурическая интерпретация в режиме проверки гипотез. Электропроводность и реология земной коры. Тезисы всероссийского совещания. М.: Институт океанологии РАН. 1999.

- Бердический М.Н., Дмитриев В.И., Новиков Д.Б., Пастушан В.В.* Анализ и интерпретация магнитотеллурических данных. М.: Диалог-МГУ. 1997.
- Варенцов И.М., Голубев Н.Г.* Подсистема двумерной инверсии магнитотеллурических данных. (Руководство пользователя). Редакция 15.05.1995.
- Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е.* Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. Актуальные вопросы прикладной математики. М.: Изд-во МГУ. 1989.
- Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е.* Метод и алгоритм расчета электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью в произвольном слое. Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. М.: Изд-во МГУ. 1990.
- Дмитриев В.И., Позднякова Е.Е.* Математическое моделирование низкочастотных электромагнитных полей в трехмерной неоднородной среде. Прямые и обратные задачи математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1991.
- Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г., Крылов В.А.* Методы моделирования электромагнитных полей. (Материалы международного проекта COMMEM1). М.: Наука. 1990.
- Brewitt-Taylor C.R., Weaver J.T.* On the finite difference solution of two-dimensional induction problems // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1976. V. 47. P. 375–396.
- Golubev N.G., Varentsov I.M.* MT-data inversion: stable optimization methods and interactive graphics // *Abstracts of XII Workshop on EM-induction in the Earth.* 1994.
- Jones A.G.* The COPROD2 dataset: tectonic setting, recorded MT data, and comparison of models // *J. Geomag. Geoelectr.* 1993. V. 45. P. 933–955.
- Jupp D.L.B., Vozoff K.* Two-dimensional magnetotelluric inversion // *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 1977. V. 50. P. 333–352.
- Mackie R.L., Rieven S., Rodi W.* Users manual and software documentation for two-dimensional inversion of magnetotelluric data. November 12. 1997.
- Marquardt D.W.* An algorithm for least-square inversion and its application to geophysical problems // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1963. V. 11. P. 431–441.
- Marquardt D.W.* Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation and nonlinear estimation // *Technometrics.* 1970. V. 12. P. 591–612.
- Rodi W., Mackie R.L.* Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion // Submitted to *Geophysics.* August 10. 1998.
- Smith J.T., Booker J.R.* Rapid inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96. P. 3905–3922.
- Varga R.S.* Matrix iterative analysis. Prentice-Hall, New Jersey. 1962.
- Wannamaker P.E., Stodt J.A., Rijo L.* Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements // *Geophysics.* 1986. V. 51. № 11. P. 2131–2144.
- Wannamaker P.E., Stodt J.A., Rijo L.* A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modeling // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1987. V. 88. P. 277–296.
- Weaver J.T., Brewitt-Taylor C.R.* Improved boundary conditions for the numerical solution of E-polarization problems in geomagnetic induction // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1978. V. 54. P. 309–317.
- Weaver J.T., Le Quang B.V., Fischer G.* A comparison of analytic and numerical results for a two-dimensional control model in electromagnetic induction – I. B-polarization calculations // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1985. V. 82. P. 263–277.
- Weaver J.T., Le Quang B.V., Fischer G.* A comparison of analytic and numerical results for a two-dimensional control model in electromagnetic induction – II. E-polarization calculations // *Geophys. J. R. astr. Soc.* 1986. V. 87. P. 917–948.
- Wieladek R., Nowozynski K., Tarlowski Z.* Application of the Cholesky-Banachiewicz method to solving some linear systems of equations approximating Helmholtz's equation // *Publ. Inst. Geophys. Pol. Acad. Sc., G-2.* 1981. V. 12. P. 3–12.
- Wu N., Booker J.R., Smith J.T.* Rapid two-dimensional inversion of COPROD2 data // *J. Geomag. Geoelectr.* 1993. V. 45. P. 933–955.