

**Практикум по электроразведке (5 курс)**

**Одномерная прямая задача МТЗ**

**Практическое задание**

Данная задача электроразведочного практикума заключается в написании программы расчета кривых МТЗ для горизонтально-слоистой среды (решения одномерной прямой задачи - задачи Тихонова - Каньяра). В пунктах 1 - 5 настоящей методической разработки излагаются физико-математические основы поведения МТ-поля в горизонтально-слоистой среде. В пункте 6 рассматриваются особенности одномерной (1D) прямой задачи МТЗ, в первую очередь - вопрос программирования операций с комплексными числами. В пункте 7 расчетная формула трансформируется в удобный для программирования вид. В пункте 8 приводится схема алгоритма программы. Наконец, в пункте 9 представлены результаты расчета прямой 1D задачи МТЗ для трех моделей, которые можно использовать для тестирования программы.

При сдаче задачи необходимо :

1. Иметь представление о теории вопроса ;
2. Представить текст программы и прокомментировать его ;
3. Для проверки правильности работы программы оперативно провести расчеты для предложенных преподавателем моделей.

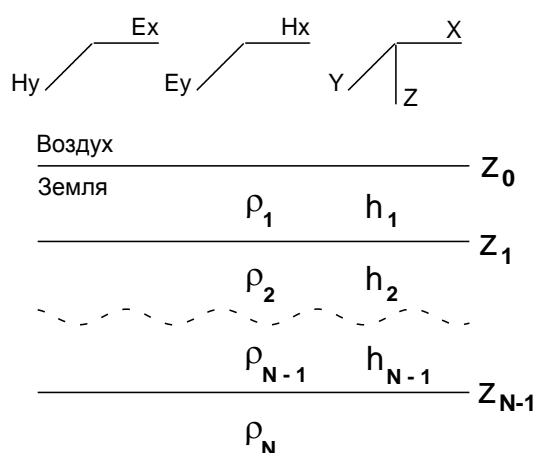
## 1. Модель Тихонова - Каньяра

Метод магнитотеллурического зондирования (МТЗ) является одним из основных методов электроразведки. Он основан на изучении переменного электромагнитного поля магнитосферной и ионосферной природы с целью получения сведений о строении верхних слоев Земли. Идея этого метода была предложена в 1950 г академиком А.Н. Тихоновым. В 1953 г ее развил французский геофизик Л. Каньяр, сформулировавший основные положения метода МТЗ. Практическое применение МТЗ началось в 60-х годах.

В работах А.Н. Тихонова и Л. Каньяра Земля рассматривается как совокупность горизонтальных слоев различного сопротивления, причем сопротивление внутри каждого слоя полагается постоянным, а сопротивление верхнего полупространства (воздуха) считается бесконечным. Электромагнитное поле создается плоской волной, источники которой находятся в верхнем полупространстве, причем фронт этой волны параллелен поверхности Земли. Поле во времени меняется по гармоническому закону. Такая модель получила название модели Тихонова - Каньяра.

Модель Тихонова - Каньяра является одномерной и не всегда применима на практике. Например, при проведении работ в предгорных районах приходится рассматривать двумерные, а во многих областях - и трехмерные модели среды. В таком случае модель Тихонова - Каньяра позволяет получить начальное приближение, от которого можно отталкиваться при решении прямых и обратных двумерных и трехмерных задач. Что же касается работ в платформенных условиях, то здесь модель Тихонова - Каньяра обычно хорошо согласуется с реальностью, по крайней мере в диапазоне частот, отвечающих за осадочный чехол.

Таким образом, задача Тихонова - Каньяра формулируется следующим образом. Возьмем правостороннюю систему координат, направив ось Z вниз, а оси X и Y расположив в плоскости, разделяющей воздух и Землю (рис. 1). Разделим



Землю на N горизонтальных изотропных слоев с сопротивлениями  $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_{N-1}, \rho_N$  и мощностями  $h_1, h_2 \dots h_{N-1}$  (мощность N-го слоя считается бесконечной). Модель возбуждается плоским полем, меняющимся во времени по гармоническому закону. Требуется рассчитать импеданс (отношение взаимоортогональных горизонтальных компонент электрического и магнитного полей) на поверхности Земли.

Рис. 1. Модель Тихонова - Каньяра.

## 2. Уравнения, описывающие МТ-поле в горизонтально-слоистой среде

Теория электромагнитного поля основана на системе уравнений Максвелла. В областях, где среда однородна и изотропна, и при отсутствии сторонних источников уравнения Максвелла принимают вид :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H}(t) = \vec{E}(t) / \rho + \varepsilon \partial \vec{E}(t) / \partial t \\ \operatorname{rot} \vec{E}(t) = -\mu \partial \vec{H}(t) / \partial t \\ \operatorname{div} \vec{H}(t) = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E}(t) = 0 \end{cases}$$

Здесь  $\vec{E}(t)$  и  $\vec{H}(t)$  - напряженности электрического и магнитного полей,  $\rho$ ,  $\varepsilon$  и  $\mu$  - свойства среды (сопротивление, диэлектрическая и магнитная проницаемости).

Обычно в структурной электроразведке рассматриваются немагнитные горные породы, для которых  $\mu$  равна  $\mu_0$  - магнитной проницаемости вакуума.

В квазистационарном приближении токами смещения (вторым членом в правой части первого уравнения Максвелла) пренебрегают по отношению к токам проводимости (первому члену). Тогда первое уравнение Максвелла записывается следующим образом :

$$\operatorname{rot} \vec{H}(t) = \vec{E}(t) / \rho$$

При рассмотрении гармонических полей в электроразведке применяется символический метод, заключающийся в представлении векторов, описывающих поле, в виде  $\vec{A}(t) = \operatorname{Re}(\vec{A} \cdot e^{-i\omega t})$ , где  $\vec{A}(t)$  - сам вектор,  $\vec{A}$  - его комплексная амплитуда,  $\omega$  - круговая частота,  $t$  - время. Для комплексных амплитуд электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей уравнения Максвелла принимают вид :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{E} / \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{H} \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Переходя к координатной записи первого уравнения Максвелла, получим :

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) \vec{1}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \vec{1}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \vec{1}_z = \sigma(E_x \vec{1}_x + E_y \vec{1}_y + E_z \vec{1}_z)$$

Поскольку в нашей модели поле и разрез не меняются по горизонтали, все горизонтальные производные в этом уравнении равны нулю и оно может быть упрощено :

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{1}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \vec{1}_y = \sigma E_x \vec{1}_x + \sigma E_y \vec{1}_y + \sigma E_z \vec{1}_z \quad (2.1)$$

Второе уравнение Максвелла в координатной записи принимает вид :

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{1}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{1}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{1}_z = i\omega\mu_0(H_x\vec{1}_x + H_y\vec{1}_y + H_z\vec{1}_z)$$

Аналогичным образом это уравнение может быть упрощено :

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{1}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{1}_y = i\omega\mu_0 H_x\vec{1}_x + i\omega\mu_0 H_y\vec{1}_y + i\omega\mu_0 H_z\vec{1}_z \quad (2.2)$$

Вычленив из уравнений (2.1) и (2.2) составляющие при  $\vec{1}_z$ , получим, что  $E_z = 0$  и  $H_z = 0$ . Таким образом, вертикальные компоненты электрического и магнитного полей в модели Тихонова - Каньяра отсутствуют.

Теперь вычленим из уравнения (2.1) составляющие при  $\vec{1}_x$ , а из уравнения (2.2) - составляющие при  $\vec{1}_y$  и запишем полученные уравнения в одну систему:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_y \end{cases} \quad (2.3)$$

В другую систему включим уравнения, возникающие при вычлениении из уравнения (2.1) составляющих при  $\vec{1}_y$ , а из уравнения (2.2) - составляющих при  $\vec{1}_x$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y \\ -\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu_0 H_x \end{cases} \quad (2.4)$$

Независимость систем (2.3) и (2.4) свидетельствует о том, что МТ-поле в модели Тихонова - Каньяра состоит из двух независимых частей, называемых модами. Первая мода содержит компоненты  $E_x$  и  $H_y$ , а вторая - компоненты  $H_y$  и  $E_x$ .

Выражая  $H_y$  из второго уравнения системы (2.3) и подставляя в первое, получим одномерное уравнение Гельмгольца для компоненты  $E_x$  :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + i\omega\mu_0 E_x / \rho = 0$$

Аналогичным образом выражая  $E_x$  из первого уравнения этой системы и подставляя во второе, получим одномерное уравнение Гельмгольца для  $H_y$  :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + i\omega\mu_0 H_y / \rho = 0$$

Введем волновое число  $k = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho}$ . Поскольку квадратный корень из комплексного числа представляет собой двужначную функцию, будем брать то значение  $k$ , реальная часть которого положительна (рис. 2). Действительная и мнимая части волнового числа могут быть записаны в виде:

$$\operatorname{Re}(k) = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\rho}} \quad \operatorname{Im}(k) = -\sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\rho}}$$

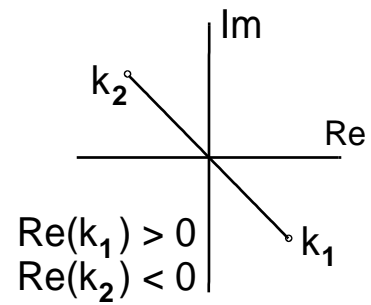


Рис. 2. К вопросу о выборе  $k$ .

Теперь одномерные уравнения Гельмгольца для  $E_x$  и  $H_y$  примут вид :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k^2 E_x = 0 \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - k^2 H_y = 0 \quad (2.5)$$

Полученные уравнения и являются исходными при решении прямой задачи МТЗ. Они описывают поведение поля внутри слоя, имеющего сопротивление  $\rho$ .

Отметим, что такая же система уравнений может быть получена для моды, содержащей компоненты  $E_y$  и  $H_x$  путем преобразований системы (2.4). Таким образом, в модели Тихонова - Каньяра обе моды равнозначны. Поэтому в дальнейшем мы будем оперировать лишь модой, содержащей  $E_x$  и  $H_y$ , а все выкладки для  $E_y$  и  $H_x$  могут быть получены совершенно аналогичным способом.

На границах слоев выполняются условия сопряжения, которые заключаются в том, что компоненты  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  и  $H_y$  непрерывны при переходе от одного слоя к другому.

### 3. МТ-поле в однородном полупространстве

Известно, что общее решение уравнений (2.5) записывается в виде :

$$\begin{cases} E_x(z) = C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz} \\ H_y(z) = D_1 e^{-kz} + D_2 e^{kz} \end{cases} \quad (3.1)$$

Возбуждение поля происходит сверху, поэтому поле не может неограниченно возрастать с глубиной. Следовательно,  $C_2 = D_2 = 0$  и система (3.1) упрощается :

$$\begin{cases} E_x(z) = C_1 e^{-kz} \\ H_y(z) = D_1 e^{-kz} \end{cases} \quad (3.2)$$

Подставим эти выражения для  $E_x(z)$  и  $H_y(z)$  во второе уравнение системы (2.3):

$$\frac{\partial}{\partial z} (C_1 e^{-kz}) = i\omega\mu_0 D_1 e^{-kz}$$

Выполнив дифференцирование, получим :

$$-kC_1 e^{-kz} = i\omega\mu_0 D_1 e^{-kz}$$

Сократим экспоненты в левой и правой частях и поделим на  $i\omega\mu_0$  :

$$D_1 = -\frac{k}{i\omega\mu_0} C_1$$

С учетом этого система (3.2) примет вид :

$$\begin{cases} E_x(z) = C_1 e^{-kz} \\ H_y(z) = -\frac{k}{i\omega\mu_0} C_1 e^{-kz} \end{cases}$$

Теперь осталось избавиться от неизвестной константы  $C_1$ . Для этого введем новую величину - импеданс  $Z$ , которую определим как отношение  $E_x(z)$  и  $H_y(z)$  :

$$Z = \frac{E_x(z)}{H_y(z)} = \frac{C_1 e^{-kz}}{-\frac{k}{i\omega\mu_0} C_1 e^{-kz}} = -\frac{i\omega\mu_0}{k} \quad (3.3)$$

Здесь  $k = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho}$  - волновое число полупространства.

Таким образом, в любой точке однородного полупространства (в том числе на его поверхности) импеданс принимает одинаковые значения и зависит только от частоты и удельного сопротивления полупространства. Что же касается компонент  $E_x$  и  $H_y$ , то они зависят от источника (эта зависимость заключена в константах  $C_1$  и  $D_1$ ) и затухают с глубиной. Рассмотрим процесс этого затухания подробнее.

Из формул (3.2) следует, что

$$\frac{E_x(z)}{E_x(0)} = \frac{H_y(z)}{H_y(0)} = e^{-kz}$$

Представляя волновое число  $k$  в виде суммы действительной и мнимой частей, мы можем записать полученную экспоненту в виде :

$$\begin{aligned} e^{-kz} &= e^{-\operatorname{Re}(k)z} e^{-i\operatorname{Im}(k)z} = e^{-\sqrt{\omega\mu_0 / (2\rho)} \cdot z} e^{i\sqrt{\omega\mu_0 / (2\rho)} \cdot z} = \\ &= e^{-\sqrt{\omega\mu_0 / (2\rho)} \cdot z} (\cos \sqrt{\omega\mu_0 / (2\rho)} \cdot z + i \sin \sqrt{\omega\mu_0 / (2\rho)} \cdot z) \end{aligned}$$

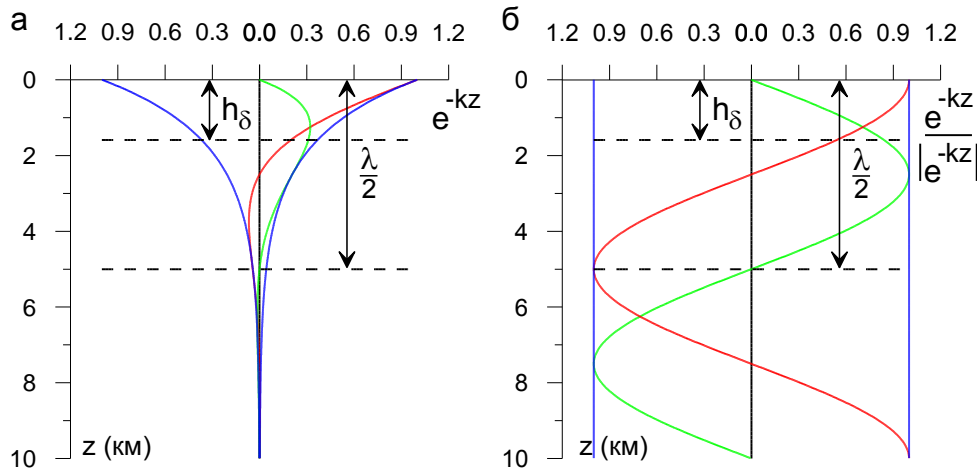


Рис. 3. Изменение  $e^{-kz}$  с глубиной.

Первый множитель этого произведения отражает затухание с глубиной, а второй - осцилляцию. На рис. 3 (а) показано поведение поля частотой 1 Гц для полупространства с удельным сопротивлением 10 Ом\*м. Синей линией показано убывание с глубиной модуля  $e^{-kz}$ , красной - действительной части  $e^{-kz}$ , зеленой - мнимой части  $e^{-kz}$ . Из рисунка видно, что эффект затухания существенно превышает эффект осцилляции. На рис. 3 (б) эти величины нормированы на модуль  $e^{-kz}$ , т.е. эффект затухания исключен, что позволяет более наглядно изучить эффект осцилляции. В частности, в момент времени, когда поле на поверхности максимально, на глубине  $\lambda/4$  оно еще будет равным нулю, а на глубине  $\lambda/2$  - и вовсе находиться в противофазе и т.д. (см. график действительной части  $e^{-kz}$ ). Через время, равное четверти периода колебаний, волна распространится на глубину  $\lambda/4$  (см. график мнимой части  $e^{-kz}$ ).

Период осцилляции (длину волны  $\lambda$ ) найдем из условия:  $-\lambda \cdot \text{Im}(k) = 2\pi$ .

Расписывая мнимую часть  $k$ , получим:  $\lambda \sqrt{\omega\mu_0} / \sqrt{2\rho} = 2\pi$ . Отсюда

$$\lambda = \frac{2\pi\sqrt{2\rho}}{\sqrt{\omega\mu_0}}$$

Толщиной скин-слоя  $h_\delta$  называют глубину, на которой поле затухает в  $e$  раз.

Ее можно найти из условия:  $\text{Re}(k) \cdot h_\delta = 1$ . После преобразований получим:

$$h_\delta = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\sqrt{2\rho}}{\sqrt{\omega\mu_0}}$$

Толщина скин-слоя характеризует глубинность исследований, причем она может использоваться и в горизонтально-слоистой среде. При этом вместо сопротивления полупространства подставляется кажущееся сопротивление на данной частоте.

#### 4. Вывод рекуррентной формулы для расчета импеданса на Земной поверхности

Запишем одномерное уравнение Гельмгольца для компоненты  $E_X$  в пределах слоя с номером  $m$  ( $1 \leq m \leq N$ ):

$$\partial^2 E_X / \partial z^2 - k_m^2 E_X = 0$$

В этой формуле  $k_m = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho_m}$  - волновое число слоя с номером  $m$ . Как уже говорилось, общее решение этого уравнения записывается в виде:

$$E_X = C_1^m \cdot e^{-k_m z} + C_2^m \cdot e^{k_m z} \quad (4.1)$$

Подставив это решение во второе уравнение системы (2.3) и проведя дифференцирование, получим:

$$-k_m C_1^m \cdot e^{-k_m z} + k_m C_2^m \cdot e^{k_m z} = i\omega\mu_0 H_Y$$

Отсюда:

$$H_Y = \frac{1}{i\omega\mu_0} (-k_m C_1^m \cdot e^{-k_m z} + k_m C_2^m \cdot e^{k_m z}) \quad (4.2)$$

Введем импеданс  $Z = E_X / H_Y$  Тогда с учетом (4.1) и (4.2) внутри  $m$ -го слоя:

$$Z = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \frac{C_1^m \cdot e^{-k_m z} + C_2^m \cdot e^{k_m z}}{-C_1^m \cdot e^{-k_m z} + C_2^m \cdot e^{k_m z}}$$

Разделим числитель и знаменатель на  $\sqrt{C_1^m \cdot C_2^m}$ . В результате получим:

$$Z = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \frac{\sqrt{C_1^m / C_2^m} \cdot e^{-k_m z} + \sqrt{C_2^m / C_1^m} \cdot e^{k_m z}}{-\sqrt{C_1^m / C_2^m} \cdot e^{-k_m z} + \sqrt{C_2^m / C_1^m} \cdot e^{k_m z}}$$

Введем обозначение:

$$\alpha_m = -\ln \sqrt{C_1^m / C_2^m}$$

Тогда выражение для импеданса примет вид:

$$Z = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \frac{e^{-\alpha_m} \cdot e^{-k_m z} + e^{\alpha_m} \cdot e^{k_m z}}{-e^{-\alpha_m} \cdot e^{-k_m z} + e^{\alpha_m} \cdot e^{k_m z}}$$

Перемножим экспоненты и изменим порядок слагаемых в числителе и знаменателе:

$$Z = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \frac{e^{\alpha_m + k_m z} + e^{-(\alpha_m + k_m z)}}{e^{\alpha_m + k_m z} - e^{-(\alpha_m + k_m z)}} \quad (4.3)$$

Структура этого выражения соответствует формуле гиперболического котангенса:



$$\operatorname{cth} \theta = (e^{\theta} + e^{-\theta}) / (e^{\theta} - e^{-\theta})$$

Таким образом, формулу (4.3) можно записать в виде :

$$Z = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth}(\alpha_m + k_m z)$$

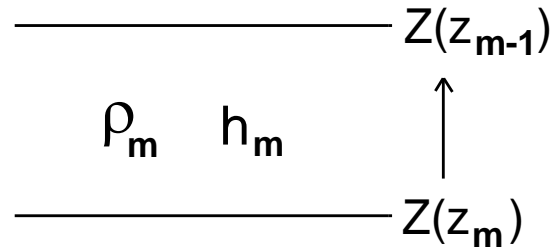
Найдем связь между импедансом на кровле и подошве  $m$  - го слоя (рис. 4).

На подошве  $m$  -го слоя импеданс равен :

$$Z(z_m) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth}(\alpha_m + k_m z_m)$$

Отсюда :

$$\alpha_m = \operatorname{arcth} \left[ \frac{k_m}{i\omega\mu_0} Z(z_m) \right] - k_m z_m \quad (4.4)$$



Импеданс на кровле  $m$  - го слоя равен :

$$Z(z_{m-1}) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth}(\alpha_m + k_m z_{m-1})$$

**Рис. 4. Переход от импеданса на подошве к импедансу на кровле  $m$ -го слоя.**

С учетом (4.4) имеем :

$$Z(z_{m-1}) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth} \left( \operatorname{arcth} \left[ \frac{k_m}{i\omega\mu_0} Z(z_m) \right] - k_m z_m + k_m z_{m-1} \right)$$

Мощность  $m$  - го слоя  $h_m = z_m - z_{m-1}$ , следовательно :

$$Z(z_{m-1}) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth} \left( -k_m h_m + \operatorname{arcth} \left[ \frac{k_m}{i\omega\mu_0} Z(z_m) \right] \right)$$

Эта рекуррентная формула выражает импеданс на кровле  $m$  - го слоя  $Z(z_{m-1})$  через импеданс на подошве  $m$  -го слоя  $Z(z_m)$ , свойства слоя ( $k_m$  и  $h_m$ ) и частоту.

В соответствии с (3.3) импеданс на поверхности нижнего ( $N$  - го) слоя равен :

$$Z(z_{N-1}) = -i\omega\mu_0 / k_N$$

Согласно с граничными условиями компоненты  $E_x$  и  $H_y$  на границах слоев непрерывны, следовательно, непрерывен и импеданс. Поэтому импеданс на кровле нижележащего слоя равен импедансу на подошве вышележащего слоя.

Итак, зная импеданс на самой нижней ( $N-1$  - ой) границе, мы можем пересчитать его на  $N-2$  - ю границу, затем - на  $N-3$  - ю и далее вплоть до земной поверхности. Полученное значение импеданса на поверхности Земли будет зависеть только от свойств (сопротивлений и мощностей) слоев и частоты. Это значение и будет решением прямой задачи МТЗ в модели Тихонова - Каньяра.

## 5. Кривые МТЗ

В простейшем случае однородной Земли ( $N = 1$ ), импеданс на поверхности :

$$Z = Z(0) = -i\omega\mu_0 / k$$

Подставляя сюда  $k = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho}$  и переходя к модулю импеданса, получим :

$$|Z| = \sqrt{\omega\mu_0 \rho}$$

Выразим отсюда  $\rho$  :

$$\rho = |Z|^2 / (\omega\mu_0)$$

Таким образом, определив импеданс  $Z$  на некоторой частоте  $\omega$  над однородной средой, мы можем по полученной формуле найти сопротивление  $\rho$  этой среды. В случае слоистой среды сопротивление, определяемое по этой формуле, является средневзвешенным сопротивлением слоев, в которые проникает поле на данной частоте. Такое средневзвешенное сопротивление называют кажущимся. В МТЗ его принято обозначать через  $\rho_T$ .

С понижением частоты глубина проникновения поля растет, и кажущееся сопротивление начинает нести информацию о все более глубоких слоях. Частотная зависимость кажущегося сопротивления, качественно отражающая изменение сопротивления с глубиной, называется кривой кажущегося сопротивления.

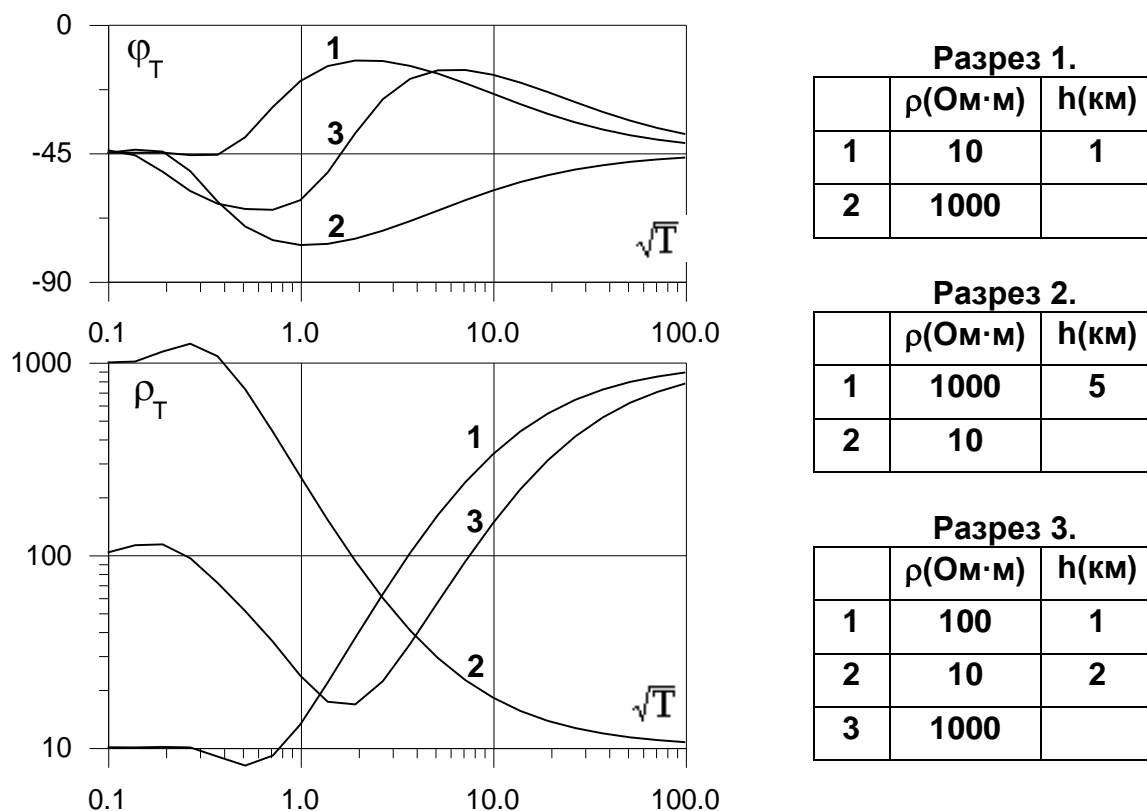


Рис. 5. Примеры кривых кажущегося сопротивления и фазы импеданса.

При построении кривых кажущегося сопротивления по горизонтали в логарифмическом масштабе откладывается корень из периода колебаний  $\sqrt{T} = \sqrt{2\pi/\omega}$ , а по вертикали, также в логарифмическом масштабе -  $\rho_T$ . Восходящие и нисходящие ветви кривых  $\rho_T$  не могут идти круче, чем под  $63^{\circ}25'$ .

Кривые кажущегося сопротивления обычно дополняют фазовыми кривыми - кривыми фазы импеданса  $\varphi_T$ . При построении фазовых кривых по горизонтали откладывается  $\sqrt{T}$  в логарифмическом, а по вертикали -  $\varphi_T$  в арифметическом масштабе. Фазовые кривые несут информацию лишь об относительных изменениях удельного сопротивления среды. Над однородным полупространством  $\varphi_T = -45^{\circ}$ .

Амплитудные и фазовые кривые связаны интегральным преобразованием Гильберта. Приближенно связь  $\rho_T$  и  $\varphi_T$  описывается соотношением :

$$\frac{d \log \rho_T}{d \log \sqrt{T}} \approx 2 + \frac{8}{\pi} \varphi_T$$

Видно, что фазовые кривые имеют смысл производной амплитудных кривых. Один и тот же слой проявляется на фазовых кривых на меньших периодах, чем на амплитудных, поэтому глубинность кривых  $\varphi_T$  больше, чем кривых  $\rho_T$ .

Примеры кривых  $\rho_T$  и  $\varphi_T$  приведены на рис. 5.

## 6. Особенности прямой одномерной задачи МТЗ

Напомним, что при решении прямой 1D задачи метода вертикального электрического зондирования (ВЭЗ) основная трудность заключается в расчете интегрального преобразования, для чего приходится применять линейные фильтры. Это обусловлено использованием в методе ВЭЗ точечных (трехмерных) источников поля. Поэтому для решения задачи в среде с плоскими границами необходимо просуммировать решения для всех пространственных частот (т.е. рассчитать интегральное преобразование). В методе МТЗ источник, как и границы слоев, плоский. Поэтому здесь решение ищется лишь на одной (нулевой) пространственной частоте, и никаких интегральных преобразований не возникает.

Основная трудность при решении прямой задачи МТЗ, в сравнении с прямой задачей ВЭЗ, заключается в необходимости работы с комплексными числами, возникающими за счет того, что поле является гармоническим. Попутно заметим, что при решении прямой

1D задачи метода частотного зондирования (ЧЗ) приходится иметь дело и с расчетом

	ВЭЗ	МТЗ	ЧЗ
Интегральные преобразования	+	-	+
Комплексные числа	-	+	+

Табл. 1. Особенности 1D задач методов ВЭЗ, МТЗ и ЧЗ.

интегралов, и с комплексными числами, т.к. в этом случае источник является трехмерным, а поле - гармоническим (табл. 1).

Остановимся на вопросе программирования комплексных чисел. Как известно, в языке программирования FORTRAN комплексные числа являются его элементом, а в C++ - входят в состав стандартной библиотеки. При программировании на языках PASCAL и C потребуется создать функции для работы с комплексными числами самостоятельно.

Напомним, как выглядят основные операции с комплексными числами :

сложение  $(A_1 + iB_1) + (A_2 + iB_2) = (A_1 + A_2) + i(B_1 + B_2)$

вычитание  $(A_1 + iB_1) - (A_2 + iB_2) = (A_1 - A_2) + i(B_1 - B_2)$

умножение  $(A_1 + iB_1) \cdot (A_2 + iB_2) = (A_1 \cdot A_2 - B_1 \cdot B_2) + i(A_2 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2)$

деление  $\frac{A_1 + iB_1}{A_2 + iB_2} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{A_2^2 + B_2^2} + i \frac{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2}{A_2^2 + B_2^2}$

корень  $\sqrt[n]{R \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{R} \cdot e^{i(\varphi/2 + \pi \cdot n)}$ , где  $n = 0$  или  $n = 1$

экспонента  $e^{A+iB} = e^A \cos B + ie^A \sin B$

Здесь  $A$  и  $B$  - реальная и мнимая части комплексного числа,  $R$  и  $\varphi$  - модуль и фаза комплексного числа, связанные соотношениями :  $A = R \cdot \cos \varphi$ ,  $B = R \cdot \sin \varphi$ ,

$R = \sqrt{A^2 + B^2}$ ,  $\varphi = \arctg(B / A)$ .

Ниже в качестве примера приводятся тексты программ, предназначенных для расчета произведения двух комплексных чисел, и написанных на языках Borland C++, Borland C и Borland Pascal.

```
#include <stdio.h>
struct cmplx { double re, im; };
struct cmplx c_mul(struct cmplx a, struct cmplx b)
{ struct cmplx c;
  c.re = a.re * b.re - a.im * b.im;
  c.im = b.re * a.im + a.re * b.im;
  return c; }
void main(void)
{
  struct cmplx a,b,c;
  a.re = 1; a.im = 1;
  b.re = -1; b.im = -1;
  c = c_mul(a,b);
  printf("c.re = %lf c.im = %lf",c.re,c.im);
}
```

```
#include <complex.h>
void main()
{
  complex a( 1, 1), b(-1,-1);
  complex c = a * b;
  cout << "c.re = " << real(c)
  << " c.im = " << imag(c);
}
```

```
type cmplx = record re, im : double; end;
procedure c_mul(a,b : cmplx; var c : cmplx);
begin
  c.re := a.re * b.re - a.im * b.im;
  c.im := b.re * a.im + a.re * b.im;
end;
var a,b,c : cmplx;
begin
  a.re := 1; a.im := 1;
  b.re := -1; b.im := -1;
  c_mul(a,b,c);
  write('c.re = ',c.re,' c.im = ',c.im);
end.
```

## 7. Переход к приведенному импедансу

Нами получена формула для расчета импеданса на кровле нижнего слоя:

$$Z(z_{N-1}) = -i\omega\mu_0 / k_N$$

и рекуррентная формула его пересчета с подошвы на кровлю любого другого слоя :

$$Z(z_{m-1}) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth}(-k_m h_m + \operatorname{arcth}\left[\frac{k_m}{i\omega\mu_0} Z(z_m)\right])$$

Первая формула позволяет определить импеданс на кровле нижнего слоя, а вторая - последовательно пересчитать его вверх вплоть до земной поверхности (рис. 6).

Приведем эти формулы к виду, удобному для программирования. Для этого представим импеданс на кровле  $m$ -го слоя в виде :

$$Z(z_{m-1}) = -\frac{i\omega\mu_0}{k_m} R(z_{m-1}) \quad (7.1)$$

Здесь  $R(z_{m-1})$  - приведенный импеданс, зависящий от свойств среды :

$$R(z_{m-1}) = -\operatorname{cth}(-k_m h_m + \operatorname{arcth}\left[\frac{k_m}{i\omega\mu_0} Z(z_m)\right])$$

Тогда рекуррентная формула переписывается в виде :

$$-\frac{i\omega\mu_0}{k_m} R(z_{m-1}) = \frac{i\omega\mu_0}{k_m} \operatorname{cth}\left(-k_m h_m + \operatorname{arcth}\left[\frac{k_m}{i\omega\mu_0} \cdot \left(-\frac{i\omega\mu_0}{k_{m+1}} R(z_m)\right)\right]\right)$$

Учитывая, что  $k_m = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho_m}$  и  $k_{m+1} = \sqrt{-i\omega\mu_0 / \rho_{m+1}}$  и сокращая одинаковые множители в левой и правой частях формулы, окончательно получим :

$$R(z_{m-1}) = \operatorname{cth}(k_m h_m + \operatorname{arcth}\left[\sqrt{\rho_{m+1} / \rho_m} R(z_m)\right]) \quad (7.2)$$

Эта формула используется для последовательного пересчета приведенного импеданса с нижней границы (на которой  $R(z_{N-1}) = 1$ ) на Земную поверхность.

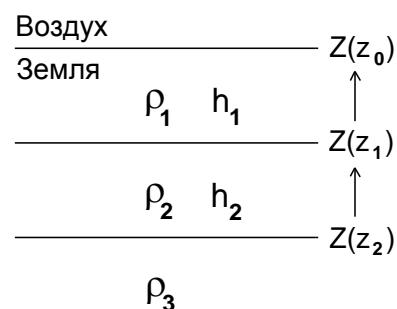
Напомним, что соотношение для пересчета  $Z$  в  $\rho_T$  записывается в виде :

$$\rho_T = |Z|^2 / \omega\mu_0 \quad (7.3)$$

Подставляя в (7.3) выражение (7.1), получим формулу пересчета  $R$  в  $\rho_T$  :

$$\rho_T = \rho_1 |R|^2$$

Из формулы (7.1) видно, что фаза импеданса  $\varphi_T$  связана с фазой приведенного импеданса  $\varphi_R$  соотношением  $\varphi_T = \varphi_R - 45^\circ$ .



**Рис. 6. Схема расчета импеданса на примере 3-слойной модели.**

Наконец, избавимся от гиперболических функций в формуле (7.2). Для этого выразим гиперболический арктангенс через натуральный логарифм :

$$\operatorname{arcth} \theta = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta + 1}{\theta - 1}$$

и введем обозначение  $A = \sqrt{\rho_m / \rho_{m+1}}$ . С учетом этого (7.2) запишется в виде :

$$R(z_{m-1}) = \operatorname{cth} \left( k_m h_m + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right] \right) \quad (7.4)$$

Теперь распишем гиперболический котангенс через экспоненты :

$$\operatorname{cth} \theta = (e^\theta + e^{-\theta}) / (e^\theta - e^{-\theta})$$

При этом формула (7.4) преобразуется к виду :

$$R(z_{m-1}) = \frac{e^{k_m h_m} e^{\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]} + e^{-k_m h_m} e^{-\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]}}{e^{k_m h_m} e^{\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]} - e^{-k_m h_m} e^{-\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]}}$$

Помножим числитель и знаменатель на  $e^{-k_m h_m} e^{\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]}$  :

$$R(z_{m-1}) = \frac{e^{\ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]} + e^{-2k_m h_m}}{e^{\ln \left[ \frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} \right]} - e^{-2k_m h_m}}$$

Отсюда :

$$R(z_{m-1}) = \frac{\frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} + e^{-2k_m h_m}}{\frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A} - e^{-2k_m h_m}}$$

Разделив числитель и знаменатель полученного выражения на  $\frac{R(z_m) + A}{R(z_m) - A}$  и введя

обозначение  $B = e^{-2k_m h_m} \frac{R(z_m) - A}{R(z_m) + A}$ , окончательно получим изящную формулу :

$$R(z_{m-1}) = \frac{1 + B}{1 - B}$$

## 8. Алгоритм программы

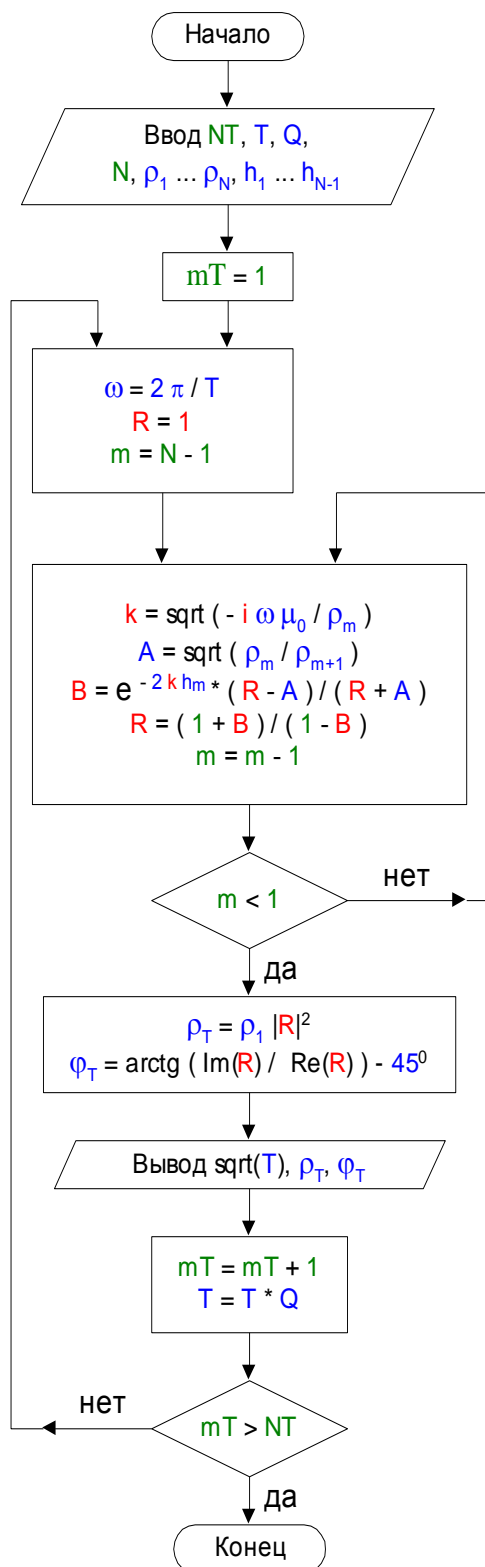


Рис. 7. Блок-схема алгоритма программы.

Схема алгоритма программы расчета кривых МТЗ для модели Тихонова - Каньяра приведена на рис. 7. Переменные и константы разных типов выделены цветом (целочисленные - темно-зеленым, вещественные - синим и комплексные - красным).

Вначале программа считывает из входного файла число периодов ( $NT$ ), первый период ( $T$ ), геометрический шаг по периодам ( $Q$ ), число слоев ( $N$ ), сопротивления слоев ( $\rho_1 \dots \rho_N$ ) в Ом\*м и мощности слоев ( $h_1 \dots h_{N-1}$ ) в метрах. Затем счетчику периодов ( $mT$ ) присваивается номер 1 и начинается цикл по периодам. Определяется круговая частота ( $\omega$ ), приведенный импеданс ( $R$ ). После этого счетчику слоев ( $m$ ) присваивается номер предпоследнего слоя ( $N-1$ ) и начинается цикл по слоям. В нем определяется волновое число каждого слоя ( $k$ ), вспомогательные переменные ( $A$  и  $B$ ). Затем приведенный импеданс ( $R$ ) пересчитывается с подошвы на кровлю текущего слоя. Счетчик слоев ( $m$ ) уменьшается на единицу. Если он остается положительным, то цикл продолжается. В противном случае рассчитывается модуль кажущегося сопротивления ( $\rho_T$ ) и фаза импеданса ( $\varphi_T$ ). Вместе с соответствующим корнем из периода ( $\sqrt{T}$ ) они записываются в выходной файл. Затем счетчик периодов ( $mT$ ) увеличивается на 1 и период ( $T$ ) пересчитывается в соответствии с шагом ( $Q$ ). Если после этого счетчик периодов

( $mT$ ) не превышает число периодов ( $NT$ ), то цикл по периодам продолжается. В противном случае программа завершает свою работу.

Напомним, что в языках C и C++ массивы начинаются с нулевого элемента, что требует соответствующих корректировок приведенного алгоритма.

### 9. Результаты расчета прямой 1D задачи МТЗ

NT = 27 T = 0.01 Q = 2 N = 2 Ro1 = 1000 Ro2 = 1 H1 = 5000	NT = 27 T = 0.01 Q = 2 N = 2 Ro1 = 1 Ro2 = 1000 H1 = 500	NT = 27 T = 0.01 Q = 2 N = 3 Ro1 = 1 Ro2 = 1000 Ro3 = 1 H1 = 500 H2 = 5000						
SqrtT	RoT	PhT	SqrtT	RoT	PhT	SqrtT	RoT	PhT
0.10	993.01	-45.00	0.10	1.00	-45.00	0.10	1.00	-45.00
0.14	1011.83	-43.78	0.14	1.00	-45.00	0.14	1.00	-45.00
0.20	1176.27	-45.00	0.20	1.00	-45.00	0.20	1.00	-45.00
0.28	1278.06	-54.30	0.28	1.00	-44.94	0.28	1.00	-44.94
0.40	1000.00	-67.08	0.40	1.01	-45.72	0.40	1.01	-45.73
0.57	599.27	-76.49	0.57	0.90	-46.16	0.57	0.90	-46.03
0.80	323.14	-81.54	0.80	0.78	-39.49	0.80	0.80	-39.19
1.13	169.90	-83.67	1.13	0.89	-26.88	1.13	0.95	-27.64
1.60	89.61	-84.04	1.60	1.39	-16.02	1.60	1.52	-19.97
2.26	48.01	-83.26	2.26	2.52	-9.70	2.26	2.69	-19.42
3.20	26.36	-81.62	3.20	4.78	-6.78	3.20	4.44	-25.75
4.53	14.98	-79.22	4.53	9.09	-5.93	4.53	5.88	-37.02
6.40	8.90	-76.15	6.40	17.08	-6.39	6.40	5.80	-48.55
9.05	5.59	-72.53	9.05	31.38	-7.77	9.05	4.64	-56.14
12.80	3.75	-68.55	12.80	55.90	-9.93	12.80	3.46	-59.28
18.10	2.70	-64.48	18.10	95.55	-12.79	18.10	2.60	-59.37
25.60	2.08	-60.60	25.60	154.97	-16.25	25.60	2.04	-57.84
36.20	1.70	-57.14	36.20	236.13	-20.15	36.20	1.69	-55.67
51.20	1.46	-54.22	51.20	335.93	-24.22	51.20	1.46	-53.45
72.41	1.31	-51.87	72.41	445.95	-28.19	72.41	1.31	-51.48
102.40	1.21	-50.05	102.40	555.32	-31.81	102.40	1.21	-49.85
144.82	1.15	-48.67	144.82	654.73	-34.91	144.82	1.15	-48.57
204.80	1.10	-47.65	204.80	738.85	-37.43	204.80	1.10	-47.59
289.63	1.07	-46.90	289.63	806.32	-39.42	289.63	1.07	-46.87
409.60	1.05	-46.36	409.60	858.38	-40.93	409.60	1.05	-46.34
579.26	1.03	-45.97	579.26	897.48	-42.06	579.26	1.03	-45.96
819.20	1.02	-45.69	819.20	926.31	-42.89	819.20	1.02	-45.68

### 10. Контрольные вопросы

1. Модель Тихонова - Каньяра.
2. Уравнения, описывающие МТ-поле в горизонтально-слоистой среде.
3. Волновое число.
4. Плоское поле в однородном полупространстве. Длина волны, толщина скин-слоя.
5. Импеданс в однородном полупространстве.
6. Амплитудные и фазовые кривые МТЗ.
7. Высокочастотная и низкочастотная асимптотика кривых МТЗ.



8. Связь амплитудных и фазовых кривых.
9. Рекуррентная формула для расчета импеданса на поверхности слоистой среды.
10. Приведенный импеданс.
11. Особенности прямой одномерной задачи МТЗ по сравнению с прямыми одномерными задачами ВЭЗ и ЧЗ.
12. Программирование операций с комплексными числами.
13. Блок-схема алгоритма программы.

## **11. Литература**

1. М.Н. Бердичевский, В.И. Дмитриев. «Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред». Москва, Недра, 1992.
2. М.С. Жданов. «Электроразведка». Москва, Недра, 1986.